דיסקרטית - תרגול 1

יחס שקילות:

הגדרות:

1. $A \times B = \{(a,b) \mid a \in A \text{ וגם } b \in B\}$

2. $R \subseteq A \times B$ יחס

3. $R \subseteq A \times A$ יחס רפלקסיבי אם לכל $x \in A$ מתקיים $(x,x) \in R$.

4. יהי $R \subseteq A \times A$ יחס. $R^{-1} = \{(b,a) \mid (a,b) \in R\}$ יחס ההפוך של R.

5. $R \subseteq A \times A$ יחס סימטרי אם $(x,y) \in R$ אז $(y,x) \in R$. במילים אחרות:
סימטרי $\longleftrightarrow$ $R^{-1} = R$

6. יהי $R \subseteq A \times A$ ו- $S \subseteq A \times A$ $\quad R \circ S = \{(a,c) \mid \text{קיים } b \in A \text{ כך ש- } (a,b) \in R \text{ וגם } (b,c) \in S\}$
הרכבה של R עם S.

7. $R \subseteq A \times A$ יחס טרנזיטיבי אם $(x,y) \in R$ וגם $(y,z) \in R$ אז $(x,z) \in R$.
במילים אחרות R טרנזיטיבי $\longleftrightarrow$ $R^2 = R \circ R \subseteq R$

הגדרה:
יהי $R \subseteq A \times A$ יחס שקילות אם R רפלקסיבי, סימטרי וטרנזיטיבי.

דוגמה:

$$A = \{1,2,3,4,5,6\}$$

$R = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6),(2,4),(2,6),(4,6),(4,2),(6,2),(6,4),(3,5),(5,3)\}$

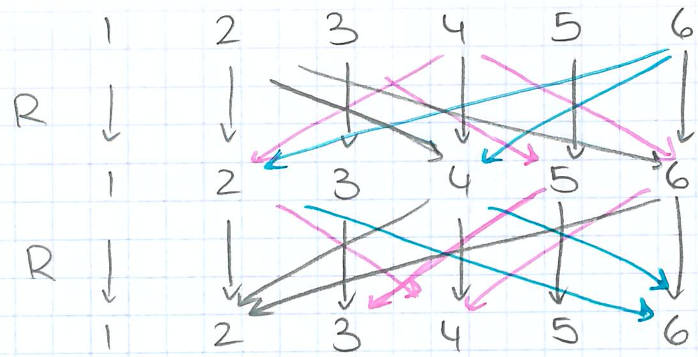
R רפלקסיבי:

כי $(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6) \in R$

R סימטרי:

$R^{-1} = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6),(4,2),(6,2),(6,4),(2,4),(2,6),(4,6),(5,3),(3,5)\} = R$

R טרנזיטיבי:



$R^2=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6),(2,4),(2,6),(3,5),(4,2),(4,6),(5,3),(6,2),(6,4)\}=R$

לכן R יחס שקילות.

הגדרה:

יהי $R\subseteq A\times A$ יחס שקילות ויהי $a\in A$.

המחלקה של a לפי R היא:

$$[a]_R=\{b\in A \mid (a,b)\in R\}\subseteq A$$

דוגמא:

אצל A ו- R מקודם:

$[1]_R=\{1\}$

כי $(1,1)\in R$

$[2]_R=\{2,4,6\}$

כי $(2,6),(2,4),(2,2)$

$[3]_R=\{3,5\}$

כי $(3,3),(3,5)$

$[4]_R=\{2,4,6\}=[2]_R$

$[5]_R=\{3,5\}=[3]_R$

$[6]_R=\{2,4,6\}=[2]_R$

מסתכלים על המספר ורואים מה מחובר אליו.

תכונות של מחלקות שקילות:

נתון $R \subseteq A \times A$ יחס שקילות.

1. $a \in [a]_R$ כי R רפלקסיבי $\leftarrow$ $(a,a) \in R$

2. $[a]_R \neq \emptyset$

3. אם $b \in [a]_R$ אז $[b]_R = [a]_R$

דוגמא: $4 \in [2]_R$ $\leftarrow$ $[4]_R = [2]_R$ כי סימטרי

4. לכל $a,b \in A$ קיימים 2 אפשרויות:

I: $[a]_R = [b]_R$

II: $[a]_R \cap [b]_R = \emptyset$

5. איחוד כל המחלקות השונות (זרות) נותן את A.

דוגמא: $[1]_R \cup [2]_R \cup [3]_R = A$

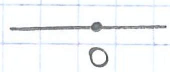
סימונים:

$\mathbb{N} = \{1,2,3,\dots\}$ מספרים טבעיים

$\mathbb{Z} = \{\dots,-2,-1,0,1,2,\dots\}$ מספרים שלמים

$\mathbb{Q} = \{\frac{n}{m} \mid n \in \mathbb{Z}$ וגם $m \in \mathbb{N}\}$ מספרים רציונלים

$\mathbb{R} = \{$ ציר מספרים $\}$ מספרים ממשיים



דוג' "תרגיל ביחס שקילות":

1. $A = \mathbb{Q}$

$R = \{(x,y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \mid x-y \in \mathbb{Z}\}$

דוגמא:

$y = 5.5$ $x = 2.5$

$x - y = -3 \in \mathbb{Z}$

$\leftarrow$ $(2.5, 5.5) \in R$

א. צ"ל R יחס שקילות.

הוכחה:

R רפלקסיבי:

לכל $x\in\mathbb{Q}$ מתקיים $\quad x-x=0\in\mathbb{Z} \leftarrow$ ל $x\in\mathbb{Q}$ מתקיים

$(x,x)\in R$

R סימטרי:

נניח $(x,y)\in R$

צ"ל $(y,x)\in R$

$$y-x=-1(x-y)=-1\cdot n\in\mathbb{Z} \leftarrow x-y=n\in\mathbb{Z} \leftarrow (x,y)\in R$$

$\leftarrow (y,x)\in R.$

R טרנזיטיבי:

נניח $(x,y)\in R$ וגם $(y,z)\in R$

צ"ל $(x,z)\in R$

$$x-y+y-z=n+m\in\mathbb{Z} \leftarrow + \begin{cases} x-y = n\in\mathbb{Z} \leftarrow (x,y)\in R \\ y-z = m\in\mathbb{Z} \leftarrow (y,z)\in R \end{cases}$$

$\leftarrow x-z=n+m\in\mathbb{Z} \leftarrow (x,z)\in R.$

ב.

$$[0]_R=\{b\in\mathbb{Q} \mid (0,b)\in R\}=$$

$$=\{b\in\mathbb{Q} \mid 0-b\in\mathbb{Z}\}=$$

$$=\{b\in\mathbb{Q} \mid -b\in\mathbb{Z}\}=$$

$$=\{b\in\mathbb{Q} \mid b\in\mathbb{Z}\}=\mathbb{Z}$$

כי $\mathbb{N}\subseteq\mathbb{Z}\subseteq\mathbb{Q}\subseteq\mathbb{R}$

11. $[0.5]_R = \{b \in \mathbb{Q} \mid (0.5, b) \in R\} =$

$= \{b \in \mathbb{Q} \mid 0.5 - b \in \mathbb{Z}\} =$

$= \{b \in \mathbb{Q} \mid 0.5 - b = n \in \mathbb{Z}\} =$

$= \{b \in \mathbb{Q} \mid b = 0.5 - n,\ n \in \mathbb{Z}\} =$

$= \{\ldots, -2.5, -1.5, -0.5, 0.5, 1.5, 2.5, \ldots\} =$

$= 0.5 + \mathbb{Z}$

הגדרה:

יהי $R \subseteq A \times A$ יחס שקילות.

$A/R = \{[a]_R \mid a \in A\}$ קבוצה מנה

כל מחלקות השקילות הזרות.

דוגמא:

$A/R = \{[1]_R, [2]_R, [3]_R\}$

ז. $\mathbb{Q}/R = \{a + \mathbb{Z} \mid a \in [0,1) \cap \mathbb{Q}\}$

מהפגרונות קיבלנו ש- $\mathbb{Z}$ + משהו.

נציג נבחר ב-0.

10. $A = \{1,2,3,4,5,6\} \times \{1,2,3,4,5,6\}$

$R = \{((x,y),(z,w)) \in A \times A \mid x \cdot w = y \cdot z\}$

ט. הוכח R יחס שקילות.

הוכחה:

R רפלקסיבי:

$x\ w\ y\ z$

לכל $(x,y) \in A$ מתקיים $x \cdot y = y \cdot x$

$\Leftarrow$ לכל $(x,y) \in A$ מתקיים $((x,y),(x,y)) \in R$

R סימטרי:

צ"ל $((x,y),(z,w)) \in R$

צ"ל $((z,w),(x,y))$

נתון $x \cdot w = y \cdot z$

צ"ל $z \cdot y = wz$

$xw = yz \Rightarrow wx = zy \Rightarrow zy = wx$

R טרנזיטיבי:

נתון: $((x,y),(z,w)) \in R$ וגם $((z,w),(a,b)) \in R$

צ"ל $((x,y),(a,b)) \in R$

$$((x,y),(z,w)) \in R \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} xw = yz \\ zb = wa \end{array} \right. \Rightarrow x\cancel{wz}b = y\cancel{zw}a$$

כי $z \neq 0$ וגם $w \neq 0$

$\Rightarrow xb = ya \Rightarrow ((x,y),(a,b)) \in R$.

ה) מחלקות השקילות:

$[(1,1)]_R = \{(z,w) \in A \mid ((1,1),(z,w)) \in R\} =$

$= \{(z,w) \in A \mid 1 \cdot w = 1 \cdot z\} =$

$= \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\}.$

יש 3 מחלקות שקילות $= [(2,2)]_R = [(3,3)]_R = [(4,4)]_R = [(5,5)]_R = [(6,6)]_R$

$[(1,2)]_R = \{(z,w) \in A \mid ((1,2),(z,w)) \in R\} =$

$= \{(z,w) \in A \mid 1 \cdot w = 2 \cdot z\} =$

$= \{(1,2),(2,4),(3,6)\} = [(2,4)]_R = [(2,6)]_R.$

$[(2,1)]_R = \{(z,w) \in A \mid 2w = z\} =$

$= \{(2,1),(4,2),(6,3)\} = [(4,2)]_R = [(6,3)]_R.$

תרגיל ביחס סדר

1. הוכח שיחס של סדר $\rho \subseteq A^2$ הוא יחס סדר מלא אם ורק אם $\rho \cup \rho^T = A^2$.

2. מצא את יחס סדר ρ שדיאגרמת Hesse שלו נירא כדלקמן:

```
      a
    /   \
  c       b
    \   /
      d
      |
      e
```

3. הוכח שאם ρ יחס של סדר מעל קבוצה $A \neq \varnothing$ אז לכל קבוצה חלקית $B \subseteq A$ היחס $\rho_B := \rho \cap B^2$ יהיה יחס של סדר מעל B.

4. תהי $A = \{1,2,3,5,6,10,15,30\}$ הקבוצה של כל המחלקים של 30. בנה את דיאגרמת Hesse של $(A,|)$.

5. הוכח שאם α יחס של סדר מעל A ו β יחס שקילות מעל אותה קבוצה אזי $\alpha \cap \beta$ הוא יחס של סדר מעל אותה קבוצה.

6. מעל הקבוצה $\{1,2,3\}^2$ מוגדר יחס בינארי α כדלקמן: $(a,b)\alpha(c,d) \Leftrightarrow (a \mid c \wedge b \leq d)$.
הוכח ש- α יחס סדר ומצא את דיאגרמת הסה שלו.

7. יהיו $\alpha \subseteq A^2, \beta \subseteq B^2$ שני יחסי סדר המוגדרות מעל הקבוצות A,B בהתאם. מעל הקבוצה $A \times B$ מוגדר יחס בינארי γ כדלקמן:
$$(a_1,b_1)\gamma(a_2,b_2) \Leftrightarrow ((a_1 \alpha a_2 \wedge a_1 \neq a_2) \vee (a_1 = a_2 \wedge b_1 \beta b_2))$$
א. הוכח ש- γ יחס סדר מעל $A \times B$.
ב. הוכח שאם α, β יחס סדר מלא, אז גם γ הוא יחס סדר מלא.

8 . הוכח שאם $\alpha \subseteq A^2$ יחס אנטי-סימטרי וטרנזיטיבי, אז $\alpha \cup id_A$ יחס סדר.

9. צייר דיאגרמת Hesse של קבוצה סדורה חלקית (poset) $(\mathcal{P}(U), \subseteq)$
כאשר $U = \{1,2,3,4\}$

10. נתונה קבוצה $A = \{1,2,3,6,9,18\}$ ומוגדר $\Re$ יחס על A כך ש- $a\Re b$: b מתחלק ב- a.
צייר דיאגרמת Hesse של קבוצה סדורה חלקית (poset) $(A, \Re)$.

11. יהי $\Re$ יחס על $\mathbf{Z}$ כאשר $a\Re b$: $a-b$ מספר זוגי, שלם, לא שלילי. הוכח כי $\Re$ יחס סדר על $\mathbf{Z}$. האם $\Re$ הוא יחס סדר מלא (לינארי)?

12. נתונות שתי קבוצות סדורות חלקית $(A,\Re_1),(B,\Re_2)$. על $A\times B$ מוגדר יחס $\Re$ כך ש-
$(a,b)\Re(x,y)$: $a\Re_1 x$ ו- $b\Re_2 y$.
א). הוכח כי $\Re$ יחס סדר.
ב). נתון כי $\Re_1$ ו- $\Re_2$ יחסים לינארים, האם $\Re$ יחס לינארי?

13. נתונה קבוצה $A=\{2,3,4,6,8,12,16,24\}$ ויחס סדר $\Re$ על A כך ש-
$a\Re b$: b מתחלק ב- a.
א). מצא איברים מינימלים ב- A
ב). מצא איברים מקסימלים ב- A

14. נתון $X=\{0,1\}$, $A=X\times X$, על A מוגדר יחס $\Re$ כך ש-
$(a,b)\Re(c,d)$: $(a<c)$ או $(a=c$ ו- $b\le d)$.
א). הראה כי $\Re$ יחס סדר על A.
ב).מצא את כל האיברים המינימלים ואת כל האיברים המקסימלים של $\Re$.
ג). מהו איבר הכי גדול ומהו איבר הכי קטן?
ג). האם $\Re$ הוא יחס סדר מלא (לינארי)?

15. נתון $X=\{0,1,2\}$, $A=X\times X$ ו- $(a,b)\Re(c,d)$:$(a<c)$ או $(a=c$ ו- $b\le d)$.
א). הראה כי $\Re$ יחס סדר על A.
ב).מצא את כל האיברים המינימלים ואת כל האיברים המקסימלים של $\Re$.
ג). האם $\Re$ הוא יחס סדר מלא (לינארי)?

תרגיל ביחס שקילות

1. נגדיר: $R=\{(x,y)\in Q\times Q \mid x-y\in Z\}$

א. הוכיחו כי R יחס שקילות.

ב. מצאו את מחלקות השקילות הבאות:

i. $[0]_R$

ii. $[0.5]_R$

ג. תארו את Q/R. 4.

2. נגדיר: $A=\Re-\{0\}$

נגדיר: $R=\{(x,y)\in A\times A \mid \frac{x}{y}\in Q\}$

א. הוכיחו כי R יחס שקילות.

ב. מצאו את מחלקות השקילות הבאות:

i. $[1]_R$

ii. $[\sqrt{2}]_R$

ג. תארו את A/R. (אוסף כל מחלקות השקילות)

3. תהי $\Re^+$ קבוצת המספרים הממשיים הלא שליליים, כלומר $\Re^+ = \{x \in \Re \mid x \ge 0\}$.

לכל $x \in \Re^+$ נסמן ב- $\lfloor x \rfloor$ את הערך השלם של x. לדוגמא $\lfloor 2.54 \rfloor = 2$.

נגדיר יחס בינארי E מעל $\Re^+$ באופן הבא:

$$E = \{(x,y) \in \Re^+ \times \Re^+ \mid x - \lfloor x \rfloor = y - \lfloor y \rfloor\}$$

ג. הוכח כי E יחס שקילות.

ד. מצא את מחלקות השקילות הבאות:

i. $[0]_R$

ii. $[0.5]_R$

iii. תאר את $E/\Re^+$. (אוסף כל מחלקות השקילות.)

4. נתון: $A = P(\Re)$ (כאשר $\Re$ המספרים הממשיים).

נגדיר $R = \{(B,C) \in A \times A \mid B \cap \mathrm{N} = C \cap \mathrm{N}\}$

(כאשר N המספרים הטבעיים).

א. הוכח R יחס שקילות.

ב. מצא את מחלקות השקילות הבאות:

1. $[\phi]_R$

2. $[\Re]_R$

3. $[(0,1)]_R$ (כאשר $(0,1)$ קטע פתוח, כלומר $\{x \in \Re \mid 0 < x < 1\}$

5. תהי $A \subseteq Z$ ויהי k מספר שלם. נגדיר תזוזת-k של A:

$$A+k=\{a+k \mid a \in A\}$$

נגדיר את היחס R על $P(Z)$ באופן הבא:

$$R=\{ (A,B) \in P(Z)\times P(Z) \mid B=A+k \text{ כך ש- } k \in Z \text{ קיים } \}$$

א. הוכח כי R יחס שקילות.

ב. מצא את מחלקות השקילות הבאות:

i. $[\{0\}]_R$

ii. $[Z]_R$

iii. $[\{2m \mid m \in Z\}]_R$

6. תהי $B \subseteq Z$ נסמן ב- $\widetilde{B}$ את הקבוצה $\widetilde{B}=\{ -n \mid n \in B\}$

לדוגמא: $B=\{-2,5,4,-5,-3\}$ אזי $\widetilde{B}=\{2,-5,-4,5,3\}$

תהי $A=\{-6,-5,-4,-3,-2,-1,1,2,3,4,5,6\}$

נגדיר יחס R מעל $P(A)$ באופן הבא:

$$R=\{ (C,D) \mid C\cap\widetilde{C}=D\cap\widetilde{D} \}$$

א. הוכח: R יחס שקילות.

ב. תאר את מחלקת השקילות $[B]$ עבור הקבוצה B בדוגמא שבפתיח השאלה.

ג. תאר את מחלקת השקילות $[\varnothing]$.

ד. תאר את החלוקה הנקבעת ע״י היחס R.

7. תהי קבוצה בת n איברים $A=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$,

ותהי $B\subseteq A$, $B=\{a_1,a_2,\ldots,a_m\}$

נגדיר יחס R מעל P(A) באופן הבא :

$$R = \{ (C,D) \mid C\cup B = D\cup B \}$$

א. הוכח כי R יחס שקילות.

ב. תאר את מחלקות השקילות.

ג. **כמה** מחלקות השקילות **יש.**

8. תהי A קבוצת כל הפסוקים המורכבים מהפסוקים האטומים p,q והקשרים $\neg,\wedge,\vee$. נגדיר יחס R מעל A באופן הבא :

$(P,Q) \in R \Leftrightarrow$ הפסוק P שקול לפסוק Q

א. הוכח ש-R יחס שקילות.

ב.כמה מחלקות שקילות קיימות. נמק.

9. מאל הקבוצה $A=2^{\{a,b,c\}}$ מוגדר יחס בינרי כדלקמן $\rho=\{(X,Y)\in A^2 \mid |X|=|Y|\}$.

הוכח ש-ρ יחס שקילות ומצא את מחלקותיו.

10. תהי $A=\{1,2,3,4,5,6\}\times\{1,2,3,4,5,6\}$. נגדיר יחס

$\rho=\{((x,y),(z,w))\in A^2 \mid xw=yz\}$. הוכח ש ρ יחס שקילות ומצא את מחלקותיו.

11. תהי $A=\{1,2,3,4,5,6\}\times\{1,2,3,4,5,6\}$. נגדיר יחס

$\rho=\{((x,y),(z,w))\in A^2 \mid x+w=y+z\}$. הוכח ש ρ יחס שקילות ומצא את מחלקותיו.

11. הוכח שאם α,β שני יחסי שקילות מעל A אזי $\alpha\cap\beta$ הוא גם יחס שקילות מעל אותה קבוצה.

דיסקרטית - הרצאה 2:

חלוקה:

הגדרה: יהי A קבוצה. ויהיו $A_k \subseteq A$ $\quad k=1,2,\dots,n$

נקראים חלוקה של A אם לכל $1 \le i \ne j \le n$ מתקיים: $A_i \cap A_j = \emptyset$

וגם $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = A$

דוגמא:

$A=\{1,2,3,4\}$

1. $A_1=\{1,2\}$, $A_2=\{3,4\}$ חלוקה.
2. $A_1=\{1,3,4\}$ $\quad A_2=\{2\}$ חלוקה.
3. $A_1=\{3\}$, $A_2=\{1,4\}$, $A_3=\{2\}$ חלוקה.
4. $A_1=\{1\}$, $A_2=\{2\}$, $A_3=\{3\}$, $A_4=\{4\}$ חלוקה.

משפט:

יהי A קבוצה ויהיו $A_k \subseteq A$ $\quad k=1,2,\dots,n$ חלוקה של A.

נגדיר $R=(A_1\times A_1)\cup(A_2\times A_2)\cup\dots\cup(A_n\times A_n)$

אזי R יחס שקילות $A_1,A_2,\dots,A_n$ מחלקות שקילות לפי יחס R.

דוגמא:

$A=\{1,2,3,4\}$ $\quad A_1=\{1,2\}$ $\quad A_2=\{3,4\}$

$\leftarrow$ $R=(A_1\times A_1)\cup(A_2\times A_2)=$ יחס שקילות

$=(\{1,2\}\times\{1,2\})\cup(\{3,4\}\times\{3,4\})=$

$=\{(1,1),(1,2),(2,2),(2,1),(3,3),(3,4),(4,3),(4,4)\}$

$[1]_R=\{b\in A \mid (1,b)\in R\}=\{1,2\}=A_1$

$[3]_R=\{b\in A \mid (3,b)\in R\}=\{3,4\}=A_2$

יחס סדר:

תזכורת:

1. רפלקסיבי $R\subseteq A\times A$

לכל $x\in A$ מתקיים $(x,x)\in R$

2. $R\subseteq A\times A$ אנטי סימטרי

אם $(x,y)\in R$ וגם $(y,x)\in R$ אז $x=y$

3. $R\subseteq A\times A$ טרנזיטיבי

אם $(x,y)\in R$ וגם $(y,z)\in R$ אז $(x,z)\in R$.

הגדרה:

יהי $R\subseteq A\times A$ יחס נקרא יחס סדר אם R רפלקסיבי, אנטי סימטרי וטרנזיטיבי.

דוגמא:

1. $A=\mathbb{N}$

$R=\{(x,y)\in A\times A \mid x\le y\}$

יחס סדר:

R רפלקסיבי:

לכל $x\in\mathbb{N}$ מתקיים $x\le x$ ← לכל $x\in A$ מתקיים $(x,x)\in R$.

R אנטי סימטרי:

נתון: $(x,y)\in R$ וגם $(y,x)\in R$

צ"ל: $x=y$

$(x,y)\in R$ וגם $(y,x)\in R$

← $x\le y$ וגם $y\le x$ ← $x\le y\le x$ ← $x=y$

R טרנזיטיבי:

נתון: $(x,y)\in R$ וגם $(y,z)\in R$

צ"ל: $(x,z)\in R$

$(x,y)\in R$ וגם $(y,z)\in R$ ← $x\le y$ וגם $y\le z$ ← $x\le y\le z$

← $x\le z$ ← $(x,z)\in R$.

2. $A=\mathbb{Z}$

הגדרה:

יהיו $a,b\in\mathbb{Z}$.

2. נאמר ש- b מחלק את a אם קיים $c\in\mathbb{Z}$ כך ש- $a=b\cdot c$.

סימון: $b|a$.

b מחלק את a.

דוגמא:

1. $4\cdot 9=36 \leftarrow 9|36$
2. $7\cdot 6=42 \leftarrow 6|42$
3. $3x=5$ אין פתרון בשלמים $\leftarrow 3\nmid 5$

I: $A=\mathbb{N}$

$R=\{(a,b)\in A\times A \mid b|a\}$ יחס סדר

הוכחה:

R רפלקסיבי:

לכל $x\in\mathbb{N}$ מתקיים $x=x\cdot 1$ $\leftarrow$ כלומר לכל $x\in\mathbb{N}$ מתקיים $x|x$

$\leftarrow$ לכל $x\in\mathbb{N}$ מתקיים $(x,x)\in R$

R אנטי סימטרי:

נתון: $(x,y)\in R$ וגם $(y,x)\in R$

צ"ל: $x=y$

$(x,y)\in R$ וגם $(y,x)\in R$ $\leftarrow$ $y|x$ וגם $x|y$ $\leftarrow$ $y\le x$ וגם

תכונה של מספרים טבעיים.

$x\le y \leftarrow \boxed{x=y}$

R טרנזיטיבי:

נתון: $(x,y)\in R$ וגם $(y,z)\in R$

צ"ל: $(x,z)\in R$

$(x,y)\in R$ וגם $(y,z)\in R$ $\leftarrow$ $y|x$ וגם $z|y$ $\leftarrow$ קיים $b_1\in\mathbb{N}$

כך ש- $x=yb_1$ וגם קיים $b_2\in\mathbb{N}$ כך ש- $y=zb_2$ $\xleftarrow{\text{הצבה!}}$ $x=zb_2b_1$

$\leftarrow z|x \leftarrow (x,z)\in R$

דוגמא:

$x=100 \quad y=20 \quad z=10$

$20|100$ וגם $10|20 \leftarrow 10|100$

$\underset{x}{100}=\underset{b_1}{5}\cdot\underset{y}{20}$ וגם $\underset{y}{20}=\underset{z}{10}\cdot\underset{b_2}{2} \leftarrow 100=10\cdot 2\cdot 5$

II: $A=\mathbb{Z}$

$R=\{(a,b)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \mid b|a\}$

R רפלקסיבי:

לכל $x\in\mathbb{Z}$ מתקיים $x=x\cdot 1$ ← לכל $x\in\mathbb{Z}$ מתקיים $x=x$ ← לכל

לכל $x\in\mathbb{Z}$ מתקיים $(x,x)\in R$

R אנטי סימטרי:

נתון: $(x,y)\in R$ וגם $(y,x)\in R$

צ"ל: $x=y$

$(x,y)\in R$ וגם $(y,x)\in R$ ← $y|x$ וגם $x|y$ $\not\Rightarrow$ $y\le x$ וגם $x\le y$

דוגמא נגדית:

$(-5,5)\in R$ ← $-5|5$ ← $5=-1\cdot(-5)$

$(5,-5)\in R$ ← $5|-5$ ← $-5=-1\cdot(5)$

אבל $5\neq -5$

לכן R לא יחס אנטי סימטרי

לכן R לא יחס סדר.

תרגיל:

יהי: $A=P(\mathbb{N})=\{B \mid B\subseteq \mathbb{N}\}$ קבוצת החזקה.

$R=\{(B,C)\in A^2 \mid B\subseteq C\}$

הוכח: R יחס סדר

הוכחה:

R רפלקסיבי:

לכל $B\in A$ מתקיים $B\subseteq B$ ← לכל $B\in A$ מתקיים $(B,B)\in R$

R אנטי סימטרי:

נתון $(B,C)\in R$ וגם $(C,B)\in R$

צ"ל: $B=C$

$(B,C)\in R$ וגם $(C,B)\in R$ ← $B\subseteq C$ וגם $C\subseteq B$ ← $B=C$

R טרנזיטיבי:

נתון: $(B,C)\in R$ וגם $(C,D)\in R$

צ"ל: $(B,D)\in R$

$(B,C)\in R$ וגם $(C,D)\in R$ ← $B\subseteq C$ וגם $C\subseteq D$ ← $B\subseteq D$

טענת עזר מסמסטר א'

← $(B,D)\in R$

הגדרה:

יהי $R\subseteq A\times A$ יחס סדר

1. יהי $a\in A$ נקרא איבר מינימלי אם לא קיים $a\neq b\in A$ כך ש- $(b,a)\in R$.
(אין איבר $b\neq a$ שקודם ל-a משמאל ביחס).

2. יהי $a\in A$ נקרא איבר קטן ביותר אם לכל $b\in A$ מתקיים $(a,b)\in R$.
(a קודם לכל איבר b משמאל ביחס)

3. יהי $a\in A$ נקרא איבר מקסימלי אם לא קיים $a\neq b\in A$ כך ש- $(a,b)\in R$
(אין איבר $a\neq b$ שאחרי a מימין ביחס).

4. יהי $a\in A$ נקרא איבר גדול ביותר אם לכל $b\in A$ מתקיים $(b,a)\in R$
(a אחרי כל איבר b מימין ביחס).

דוגמא:

1. $A=\mathbb{N}$

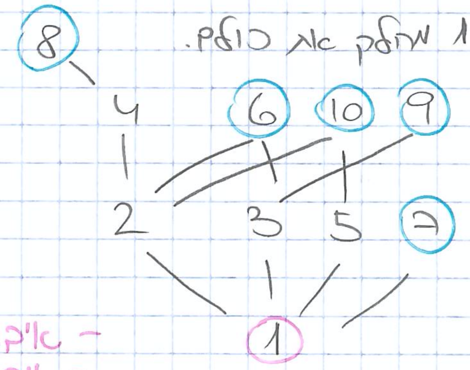
$R=\{(x,y)\in A\times A \mid x\leq y\}$

$1\leq 2\leq 3\leq \dots \leq 100\leq \dots$ ← איבר מינימלי וקטן ביותר.
אין איבר מקסימלי וגדול ביותר

2. $A=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$

$R=\{(x,y)\in A\times A \mid x\mid y\}$

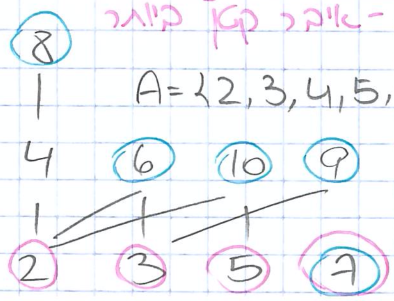
1 מחלק את כולם.



- איברים מקסימליים.
אין איבר גדול ביותר

- איבר מינימלי
- איבר קטן ביותר

3. $A=\{2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$



- איברים מקסימליים.
- אין איבר גדול ביותר

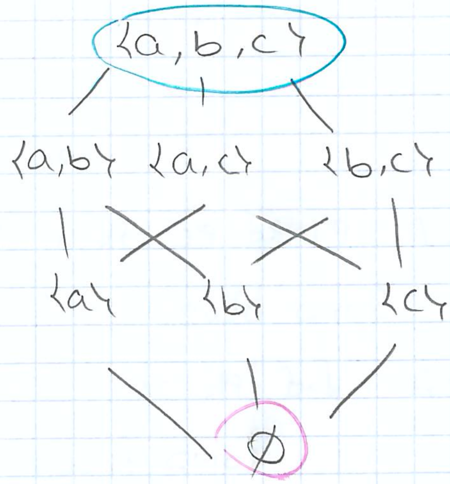
- איברים מינימליים.
- אין איבר קטן ביותר

4.

$A=\{a,b,c\}$

$R=\{(B,C)\in A\times A \mid B\subseteq C\}$

מקסימלי וגדול ביותר -



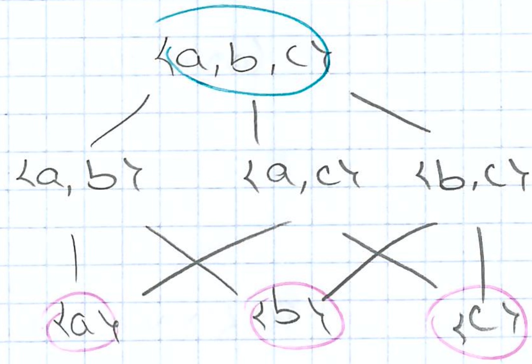
מינימלי וקטן ביותר -

5.

$A=P(\{a,b,c\})-\{\emptyset\}$

$R=\{(B,C)\in A\times A \mid B\subseteq C\}$

מקסימלי וגדול ביותר -



איברים מינימלים -

אין איבר קטן ביותר.

6.

$a\notin \mathbb{R} \qquad A=\mathbb{R}\cup\{a\}$

$R=\{(x,y)\in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \mid x\le y\}\cup\{a,a\}$

a - איבר מינימלי ומקסימלי אבל לא קטן ביותר וגם לא גדול ביותר.

דיסקרטית - תרגול 3:

פונקציה:

הגדרה: יהי $f \subseteq A\times B$ יחס נקרא פונקציה אם לכל $a\in A$ קיים לכל היותר $b\in B$ אחד כך ש- $(a,b)\in f$.

דוגמאות:

I: $A=\{a,b,c\}$ $B=\{1,2,3,4\}$

1. $(a,1),(a,4)\in f$ $f=\{(a,1),(a,4),(b,3)\}$
לא פונקציה

2. $f=\{(a,1),(b,1)\}$ פונקציה

3. $f=\{(a,4),(b,2),(c,3)\}$ פונקציה

II $A=B=\mathbb{R}$

1. $f=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y=x^4\}$
לכל $x\in\mathbb{R}$ f מתאימה את $y=x^4$

2. $f=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x=y^4\}$ לא פונקציה
כי $(1,1)\in f$ וגם $(1,-1)\in f$ כי $(-1)^4=1$
$x=y^4 \rightarrow y=\pm\sqrt[4]{x}$

3. $f=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x=y^3\}$ פונקציה.
$x=y^3 \rightarrow y=\sqrt[3]{x}$ לכל x מתאים $\sqrt[3]{x}$

הערה:

במקום לכתוב $f \subseteq A \times B$ פונקציה.

נכתוב $f: A \to B$ פונקציה במקום לכתוב $(x,y) \in f$

נכתוב $f(x)=y$

הגדרה:

יהי $f: A \to B$ פונקציה

1. A נקרא המקור של f.
2. B נקרא הטווח של f.
3. התחום של f (תחום ההגדרה) הוא $D(f) = \{x \in A \mid f(x) \in B\} \subseteq A$
4. התמונה של f היא $\mathrm{im} f = \{f(x) \in B \mid x \in A\} \subseteq B$ כל הערכים שמתקבלים ע"י f.

דוגמא:

$A = \{a, b, c, d\}$ $\qquad$ $B = \{1,2,3,4,5\}$

$f: A \to B$

1. $f(a)=4$ $\qquad$ $f(d)=4$

$D(f) = \{a, d\}$

$\mathrm{im} f = \{4\}$

2. $f(b)=3$ $\qquad$ $f(c)=2$ $\qquad$ $f(d)=2$

$\mathrm{im} f = \{2,3\}$ $\qquad$ $D(f) = \{b, c, d\}$

תרגיל:

מצא תחום ותמונה של f. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

1. $f(x)=3x+4$

$D(f)=\mathbb{R}$

תמונה:

$x=\frac{y-4}{3} \leftarrow 3x=y-4 \leftarrow 3x+4=y \leftarrow f(x)=y$

$im f=\mathbb{R}$

2. $f(x)=\frac{4x-5}{3x-7}$

$D(f)=\mathbb{R}-\{\frac{7}{3}\}$

תמונה:

$4x-5=y(3x-7) \leftarrow \frac{4x-5}{3x-7}=y \leftarrow f(x)=y$

$x(4-3y)=5-7y \leftarrow 4x-3xy=5-7y \leftarrow 4x-5=3xy-7y \leftarrow$

אם $4-3y=0$ $\leftarrow$ $y=\frac{4}{3}$ אז $x\cdot 0=5-7\cdot\frac{4}{3}$

$\leftarrow 0=-4\frac{1}{3}$ סתירה.

אבל $4-3y\neq 0$ $\leftarrow$ $y\neq\frac{4}{3}$ אז $x=\frac{5-7y}{4-3y}$

$im f=\mathbb{R}-\{\frac{4}{3}\}$

בדיקה:

$f(x)=\frac{4}{3} \rightarrow \frac{4x-5}{3x-7}=\frac{4}{3} \rightarrow (4x-5)3=4(3x-7) \rightarrow$

$\rightarrow 12x-21=12x-15 \rightarrow 6=0$ סתירה.

3. $f(x)=x^2+x+1$

$D(f)=\mathbb{R}$

תמונה:

נקודת קיצון של f היא $\left(\frac{-b}{2a}, c-\frac{-b^2}{4a}\right)$

$$f(x)=ax^2+bx+c$$

מינימום $\left(\frac{-1}{2}, 1-\frac{1}{4}\right)=\left(\frac{-1}{2}, \frac{3}{4}\right)$

$$\operatorname{im} f=\{y\in\mathbb{R} \mid y\geq \tfrac{3}{4}\}$$

דרך II:

$f(x)=y \leftarrow \quad x^2+x+1=y$

$$(x+b)^2=\underset{\overset{\parallel}{x^2}}{x^2}+\underset{\overset{\parallel}{x}}{2bx}+b^2$$

$$2b=1$$

$$b=\frac{1}{2}$$

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2=x^2+x+\frac{1}{4}$$

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}=x^2+x+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}$$

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}=x^2+x+1=y$$

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}=y$$

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2=y-\frac{3}{4}$$

אם $y-\frac{3}{4}\geq 0 \quad \leftarrow \quad y\geq\frac{3}{4}$

$$x+\frac{1}{2}=\sqrt{y-\frac{3}{4}}$$

$$x+\frac{1}{2}=\sqrt{y-\frac{3}{4}}$$

$$x=\sqrt{y-\frac{3}{4}}-\frac{1}{2}$$

$$\operatorname{im} f=\{y\in\mathbb{R} \mid y\geq\frac{3}{4}\}$$

הרכבה פונקציות:

הגדרה:

יהיו $f:B\to C$ ו $g:A\to B$ פונקציות

הרכבה של f עם g היא $f\circ g:A\to C$

כך שלכל $a\in A$ מתקיים $(f\circ g)(a)=f(g(a))$

דוגמאות:

I: $A=\{a,b,c\}$ $B=\{1,2,3\}$ $C=\{4,5,6\}$

$f:B\to C$ $g:A\to B$

$f(1)=5$ $f(2)=4$ $f(3)=5$

$g(a)=2$ $g(b)=3$ $g(c)=2$

$$(f\circ g)(a)=f(g(a))=f(2)=4$$

$$(f\circ g)(b)=f(g(b))=f(3)=5$$

$$(f\circ g)(c)=f(g(c))=f(2)=4$$

תרגיל:

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$$f(x)=x^2-5$$

$$g(x)=4x-3$$

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(4x-3)=(4x-3)^2-5=16x^2-24x+9-5=$$

$$=16x^2-24x+4$$

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2 - 5) = 4(x^2 - 5) - 3 =$

$= 4x^2 - 20 - 3 = 4x^2 - 23$

$f \circ g \neq g \circ f$

תרגיל:

$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$f(x) = x^2$

$g: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$g(x, y) = x + y$

$(f \circ g)(x, y) = f(g(x, y)) = f(x + y) = (x + y)^2$

תרגיל 1

.1 נתון $A=\{x\in Z \mid -10\le x\le 10\}$.

קבע האם היחסים הבאים הם פונקציות. נמק כל תשובה.
~~אם כן . האם הם פונקציות שלמות ?~~

א. $R=\{(x,y)\in A\times A \mid x+y=0\}$

ב. $R=\{(x,y)\in A\times A \mid x^2=y)\}$

ג. $R=\{(x,y)\in A\times A \mid x=y^2\}$

ד. $R=\{(x,y)\in A\times A \mid xy=6\}$

ה. $R=\{(x,y)\in A\times A \mid x\le y\}$

ו. $R=\{(x,y)\in A\times A \mid |x|=|y|\}$

.2 ~~נתונות הפונקציות הבאות, קבע האם הם פונקציות שלמות, חח"ע ועל,~~
~~נמק כל תשובה.~~ תחום ותמונה

א. $f:\Re\to\Re$ מוגדרת ע"י $f(x)=\dfrac{2x+5}{x+6}$

ב. $f:\Re-\{-6\}\to\Re$ מוגדרת ע"י $f(x)=\dfrac{2x+5}{x+6}$

ג. $f:\Re-\{-6\}\to\Re-\{2\}$ מוגדרת ע"י $f(x)=\dfrac{2x+5}{x+6}$

ד. $f:\Re\to\Re$ מוגדת ע"י $f(x)=x^2-x-1$

ה. $f:\{x\in\Re \mid x\ge 1\}\to\Re$ מוגדרת ע"י $f(x)=x^2-x-1$

תרגילים בפונקציות 2

האם הפונקציות הבאות שלמות חח"ע ועל

1. $f:P(\mathbb{N})\to P(\mathbb{N})$ ע"י לכל $A\in P(\mathbb{N})$ מתקיים $f(A)=\overline{A}$.

2. $f:P(\mathbb{N})\to \mathbb{N}$ ע"י לכל $A\in P(A)$ מתקיים $f(A)=|A|$.

3. $f:P(\Re)\to P(\Re)$ ע"י לכל $A\in P(\Re)$ מתקיים $f(A)=A-\mathbb{N}$.

4. $f:P(\mathbb{N})\times P(\mathbb{N})\to P(\mathbb{N})$ ע"י לכל $A,B\in P(\mathbb{N})$ מתקיים

$$f((A,B))=A\cup B$$

5. $f:P(\mathbb{N})\to P(\mathbb{N})\times P(\mathbb{N})$ ע"י לכל $A\in P(\mathbb{N})$

מתקיים $f(A)=(\overline{A},\overline{A})$

6. $f:P(\mathbb{N})\times P(\mathbb{N})\to P(\mathbb{N})\times P(\mathbb{N})$ ע"י לכל $A,B\in P(\mathbb{N})$

מתקיים $f((A,B))=(\overline{B},\overline{A})$

7. $f:P(\mathbb{N})\times P(\mathbb{N})\to P(\mathbb{N})\times P(\mathbb{N})$ ע"י לכל $A,B\in P(\mathbb{N})$

מתקיים $f((A,B))=(A\cup B,A\cap B)$

8. $f:P(\mathbb{N})\times P(\mathbb{N})\to P(\mathbb{N})\times P(\mathbb{N})$ ע"י לכל $A,B\in P(\mathbb{N})$

מתקיים $f((A,B))=(A-B,B-A)$

9. $f:P(\mathbb{N})\times P(\mathbb{N})\to P(\mathbb{N})$ ע"י לכל $A,B\in P(\mathbb{N})$

מתקיים $f((A,B))=(A-B)\cup(B-A)$

תרגיל 1

1. נתון $A=\{x\in Z \mid -10\le x\le 10\}$.

קבע האם היחסים הבאים הם פונקציות. נמק כל תשובה.
אם כן . האם הם פונקציות שלמות ?

א. $R=\{(x,y)\in A\times A \mid x+y=0\}$

ב. $R=\{(x,y)\in A\times A \mid x^2=y)\}$

ג. $R=\{(x,y)\in A\times A \mid x=y^2\}$

ד. $R=\{(x,y)\in A\times A \mid xy=6\}$

ה. $R=\{(x,y)\in A\times A \mid x\le y\}$

ו. $R=\{(x,y)\in A\times A \mid |x|=|y|\}$

2. נתונות הפונקציות הבאות ,קבע האם הם פונקציות שלמות, חח"ע ועל,
נמק כל תשובה.

א. $f:\Re\to\Re$ מוגדרת ע"י $f(x)=\dfrac{2x+5}{x+6}$

ב. $f:\Re-\{-6\}\to\Re$ מוגדרת ע"י $f(x)=\dfrac{2x+5}{x+6}$

ג. $f:\Re-\{-6\}\to\Re-\{2\}$ מוגדרת ע"י $f(x)=\dfrac{2x+5}{x+6}$

ד. $f:\Re\to\Re$ מוגדת ע"י $f(x)=x^2-x-1$

ה. $f:\{x\in\Re \mid x\ge 1\}\to\Re$ מוגדרת ע"י $f(x)=x^2-x-1$

תרגיל 2

בדוק עם הפונקציות שלמה על חח"ע

1. $f : P(\Re)\times P(\Re) \to P(\Re)$ מוגדרת ע" לכל $A,B \in P(\Re)$

א. $f(A,B) = A \cap B$

ב. $f(A,B) = A - B$

ג. $f(A,B) = A \cup \overline{B}$

2. $f : P(\Re) \to P(\Re)\times P(\Re)$ מוגדרת ע"י לכל $A \in P(\Re)$

א. $f(A) = (A,A)$

ב. $f(A) = (A,\overline{A})$

3. $f : P(\Re)\times P(\Re) \to P(\Re)\times P(\Re)$ מוגדרת ע"י לכל $A,B \in P(\Re)$

א. $f(A,B) = (B,A)$

ב. $f(A,B) = (\overline{A},\overline{B})$

ג. $f(A,B) = (A - B, A \cap B)$

דיסקרטית - תרגול 4:

פונקציה:

תזכורת:

יהי $f:A\to B$ פונקציה

1. A נקרא המקור של f.
2. B נקרא טווח של f
3. התחום של f הוא $D(f)=\{x\in A \mid f(x)\in B\}\subseteq A$
4. התמונה של f הוא $im(f)=\{f(x) \mid x\in A\}\subseteq B$

הגדרה:

יהי $f:A\to B$ פונקציה נקראת פונקציה שלמה אם לכל $x\in A$ קיים $f(x)\in B$ המקיים אחרות f פונקציה שלמה $\Longleftrightarrow$ $D(f)=A$

דוגמא:

1. $A=\{a,b,c\}$ $\quad$ $B=\{1,2\}$

$f:A\to B$

I: $f(a)=1$ $\quad$ $f(b)=2$ $\quad$ $f(c)=2$

f פונקציה שלמה כי $D(f)=A$

II: $f(b)=1$

f פונקציה לא שלמה כי $D(f)=\{b\}\neq A$

2. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

I: $f(x)=3x$

$D(f)=\mathbb{R}$ לכן f שלמה

II: $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$

$D(f)=\mathbb{R}-\{1\}\neq\mathbb{R}$

f לא שלמה.

.3 $f: \mathbb{R}-\{1\} \to \mathbb{R}$

$$f(x)=\frac{x+1}{x-1}$$

$$D(f)=\mathbb{R}-\{1\}$$

לכן f שלמה.

הגדרה:

יהי $f: A\to B$ פונקציה

f נקראת פונקציה על B אם לכל $y\in B$ קיים $x\in A$ כך ש- $f(x)=y$

כלומר f אומרת על B $\Longleftrightarrow$ $\operatorname{im} f = B$

כלומר f אומרת על B $\Longleftrightarrow$ לכל $y\in B$ למשוואה $f(x)=y$

יש פתרון. כלומר יש $x\in A$ כך ש- $f(x)=y$

דוגמאות:

.1 $A=\{a,b,c\}$ $B=\{1,2\}$

$f: A\to B$ פונקציה

I: $f(a)=1$ $f(b)=2$

$\operatorname{im} f=\{1,2\}=B$

לכן f על B.

II: $f(a)=1$ $f(b)=2$ $f(c)=1$

$\operatorname{im} f=\{1,2\}$

f על

III $f(a)=2$ $f(b)=2$ $f(c)=2$

$\operatorname{im} f=\{2\}\neq B$

f לא על ($f(x)=1$ אין פתרון $\Leftarrow$ f לא על)

.2

.2 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

I: $f(x)=3x$

לכל $y\in\mathbb{R}$ קיים לפחות $x\in\mathbb{R}$ כך ש- $f(x)=y$ $\Leftarrow$

$x=\frac{y}{3} \Leftarrow 3x=y \Leftarrow$

לכן f על $\mathbb{R}$.

כי $f(x)=y$ יש פתרון: $x=\frac{y}{3}$.

II: $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$

לכל $y\in\mathbb{R}$ קיים לפחות $x\in\mathbb{R}$

כך ש- $\frac{x+1}{x-1}=y \Leftarrow f(x)=y \Leftarrow$

$x+1=xy-y \Leftarrow x+1=y(x-1) \Leftarrow$

$x-xy=-y-1 \Leftarrow$

$x(1-y)=-y-1$

אם $y=1 \Leftarrow 1-y=0$

$x\cdot 0=-1-1$

$0=-2$ אין פתרון.

בדיקה 1:

$\frac{x+1}{x-1}=1 \Leftarrow f(x)=1$

$0=-2 \Leftarrow x+1=x-1 \Leftarrow$

לכן f לא על $\mathbb{R}$

III: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}-\{1\}$

$f(x)=\frac{x+1}{x-1}$

לכל $y\in\mathbb{R}$ כך ש- $y\neq 1$ קיים לפחות $x\in\mathbb{R}$

כך ש- $f(x)=y$.

$x+1=xy-y \Leftarrow x+1=y(x-1) \Leftarrow \frac{x+1}{x-1}=y \Leftarrow$

.3 $(y-1\neq 0 \Leftarrow y\neq 1$ כי$)$ $x(1-y)=-1-y \Leftarrow x-xy=-1-y \Leftarrow$

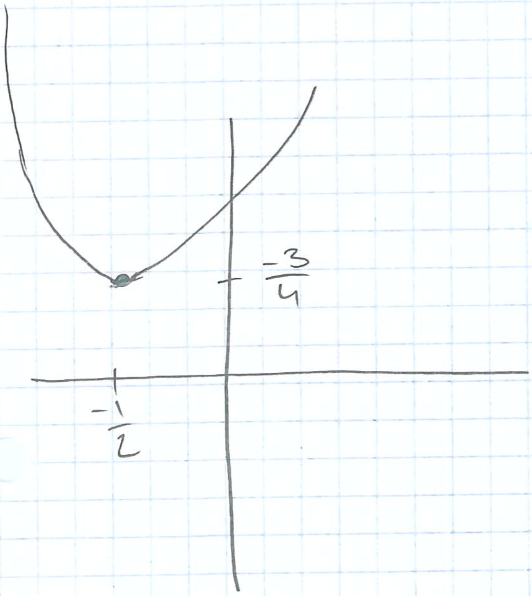
$$x = \frac{-1-y}{1-y}$$

לכן f על $\mathbb{R}-\{1\}$

3. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = x^2+x+1$$

פרק 1:



נקודת מינימום $\left(\frac{-1}{2}, \frac{3}{4}\right)$

$$\operatorname{im} f = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq \tfrac{3}{4}\} \neq \mathbb{R}$$

לכן f לא על $\mathbb{R}$

4. $f: \mathbb{R} \to \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq \frac{3}{4}\}$

$$f(x) = x^2+x+2$$

$$\operatorname{im} f = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq \tfrac{3}{4}\}$$

f על $\{y \in \mathbb{R} \mid y \geq \frac{3}{4}\}$

הגדרה:

יהי $f: A \to B$ פונקציה נקראת פונקציה חד חד ערכית

(חח"ע) אם $f(x_1) = f(x_2)$ אז $x_1 = x_2$

שקול: f חח"ע $\Longleftrightarrow$ אם $x_1 \neq x_2$ אז $f(x_1) \neq f(x_2)$

דוגמאות:

1. I: $A = \{a, b, c\}$ $B = \{1, 2\}$

$f: A \to B$

$f(a) = 1$ $f(b) = 2$

f חח"ע.

II: $f(a) = 2$ f חח"ע

$f(c)=2$ $\quad$ III: $f(a)=2$

f לא חח"ע.

2. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

I: $f(x)=3x$

נניח: $f(x_1)=f(x_2)$

צ"ל: $x_1=x_2$

$f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow 3x_1=3x_2 \Rightarrow x_1=x_2$

לכן f חח"ע.

II: $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$

נניח: $f(x_1)=f(x_2)$

צ"ל: $x_1=x_2$

$f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow \frac{x_2+1}{x_2-1}=\frac{x_1+1}{x_1-1} \Rightarrow (x_2+1)(x_1-1)=$

$(x_1+1)(x_2-1) \Rightarrow x_1x_2-x_2+x_1-1 = x_1x_2-x_1+x_2-1$

$\Rightarrow x_2+x_2=x_1+x_1 \Rightarrow 2x_2=2x_1 \Rightarrow x_2=x_1$

לכן f חח"ע.

III: $f(x)=x^2+x+1$

נניח: $f(x_1)=f(x_2)$

צ"ל: $x_1=x_2$

$f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow x_2^2+x_2+1 = x_1^2+x_1+1 \Rightarrow$

$\Rightarrow x_1^2-x_2^2+x_1-x_2=0 \Rightarrow (x_1-x_2)(x_1+x_2)+(x_1-x_2)$

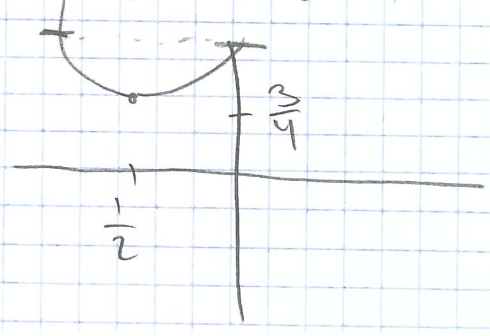
$\Rightarrow (x_1-x_2)(x_1+x_2+1)=0 \Rightarrow x_1-x_2=0$ או $x_1+x_2+1=0$

$\Rightarrow x_1=x_2$ או $x_1=-x_2-1$ (לא קיים בהכרח $x_1=x_2$)

דוגמא נגדית:

$f(0)=1$ $\quad$ $f(-1)=1$

$0\neq-1$



לכן f לא חח"ע.

.3 $f: \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -\frac{1}{2}\} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = x^2 + x + 1$$

נתון: $f(x_1) = f(x_2)$

צ"ל: $x_1 = x_2$

$f(x_1) = f(x_2) \Leftarrow x_1^2 + x_1 + 1 = x_2^2 + x_2 + 1 \Leftarrow$

$\Leftarrow x_1^2 - x_2^2 + x_1 - x_2 = 0 \Leftarrow (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) + (x_1 - x_2) = 0 \Leftarrow$

$\Leftarrow (x_1 - x_2)(x_1 + x_2 + 1) = 0 \Leftarrow x_1 - x_2 = 0$ או $x_1 + x_2 + 1 = 0$

$\Leftarrow x_1 = x_2$ או $x_1 = -x_2 - 1$

נניח $x_1 \geq -\frac{1}{2}$ וגם $x_2 \geq -\frac{1}{2}$ וגם $x_1 = -x_2 - 1$

$x_2 \geq -\frac{1}{2} \Leftarrow -x_2 \leq \frac{1}{2}$

$x_1 = -x_2 - 1 \leq \frac{1}{2} - 1 \leq -\frac{1}{2}$

נתון $x_1 \geq -\frac{1}{2}$

לכן $x_1 = -\frac{1}{2} \Leftarrow -\frac{1}{2} = -x_2 - 1$

$x_2 = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$

$x_1 = x_2 = -\frac{1}{2}$

לכן $x_1 = x_2$ לכן f חח"ע.

תזכורת הגדרה:

$P(A) = \{B \mid B \subseteq A\}$

.4 $f: P(\mathbb{N}) \times P(\mathbb{N}) \to P(\mathbb{N})$

$$f(A, B) = A \cup B$$

האם f על, חח"ע, הפיכה?

דוגמא:

$f((\{1,2,3\}, \{2,4,5\}))$
$= \{1,2,3,4,5\}$

.6

פתרון:

f שלמה: לכל $A,B \in P(N)$ $\leftarrow$ $A \subseteq N$ וגם $B \subseteq N$

$\leftarrow$ $A\cup B \subseteq N$ $\leftarrow$ $A\cup B \in P(N)$ $\leftarrow$ $f((A,B)) \in P(N)$

לכן f שלמה.

f חח"ע:

נניח $f((A_1,B_1))=f((A_2,B_2))$

צ"ל: $(A_1,B_1)=(A_2,B_2)$

צ"ל: $A_1=A_2$

$B_1=B_2$

$f((A_1,B_1))=f((A_2,B_2)) \leftarrow A_1\cup B_1=A_2\cup B_2$

לא בהכרח $A_1=A_2$

וגם $B_1=B_2$

דוגמא נגדית:

$A_1=\{1,2,3\}$ $B_1=\{2,4,5\}$

$A_2=\{1,3,5\}$ $B_2=\{2,4\}$

$A_1\neq A_2$ (וגם $B_1\neq B_2$)

$f(A_1,A_2)=\{1,2,3,4,5\}$

$f(B_1,B_2)=\{1,2,3,4,5\}$

לכן $f(A_1,B_1)=f(A_2,B_2)$

וגם $A_1\neq A_2$

f לא חח"ע.

f על:

לכל $Y\in P(N)$ קיים $(x_1,x_2)\in P(N)\times P(N)$ כאשר

כך ש- $f((x_1,x_2))=Y$ $\leftarrow$ $x_1\cup x_2=Y$

נקח $x_1=Y$ וגם $x_2=\emptyset$

לכן f על

דיסקרטית - תרגול 5:

פונקציה:

נתון $f: A\to B$ פונקציה.

תזכורת:

1. f שלמה:

לכל $x\in A$ קיים $f(x)\in B$

2. f על B:

לכל $y\in B$ קיים $x\in A$ כך ש- $f(x)=y$.

דף "תרגילים בפונקציות 2":

1. $f: P(N)\longrightarrow P(N)$

$f(A)=\overline{A}$ $\quad (\overline{A}=N-A)$

פתרון:

f שלמה:

לכל $A\in P(N)$ מתקיים $A\subseteq N$ ← $\overline{A}=N-A\subseteq N$ ←

← $\overline{A}\in P(N)$ ← $f(A)\in P(N)$

לכן f שלמה.

f חח"ע:

נניח: $f(A_1)=f(A_2)$

נוכיח: $A_1=A_2$

← $f(A_1)=f(A_2)$ ← $\overline{A}_1=\overline{A}_2$ ← $\overline{\overline{A}}_1=\overline{\overline{A}}_2$ ← $A_1=A_2$

לכן f חח"ע.

f על:

לכל $y\in P(N)$ צריך למצוא $x\in P(N)$ כך ש- $f(x)=y$ ←

← $\overline{x}=y$ ← $\overline{\overline{x}}=\overline{y}$ ← $x=\overline{y}$

לכן f על.

בדיקה:

$f(x)=f(\overline{y})=\overline{\overline{y}}=y.$

2. $f: P(\mathbb{N}) \to \mathbb{N} \cup \{0\}$

$f(A) = |A|$

מספר האיברים ב-A

דוגמא: $f(\{3,5,7,9\}) = 4$

f שלמה:

$f(2\cdot\mathbb{N}) = \infty \notin \mathbb{N}$

זוגיים

לכן f לא שלמה.

f חח"ע:

נניח: $f(A_1) = f(A_2)$

צ"ל: $A_1 = A_2$

$f(A_1)=f(A_2) \leftarrow |A_1| = |A_2|$

דוגמא נגדית:

$A_1 = \{2\}$ $A_2 = \{3\}$

$\leftarrow A_1 \neq A_2$ סוף $|A_1| = 1$ וגם $|A_2| = 1$

$\leftarrow f(A_1) = f(A_2)$ f לא חח"ע.

f על:

לכל $n \in \mathbb{N}$ צריך למצוא $A_n \in P(\mathbb{N})$ כך ש- $f(A_n) = n$

$\leftarrow |A_n| = n$

נבחר $A_n = \{1,2,\dots,n\}$ $\leftarrow$ $|A_n| = n$

$\leftarrow f(A_n) = n$

לכן f על.

3. $f: P(\mathbb{R}) \to P(\mathbb{R})$

$f(A) = A - \mathbb{N}$

דוגמא:

$f([1,2]) = (1,2)$

$f([2,4]) = (2,3) \cup (3,4)$

$f(\mathbb{N}) = \phi$

פתרון:

f שלמה:

לכל $A\in P(\mathbb{R})$ מתקיים $A\subseteq \mathbb{R} \leftarrow A-\mathbb{N} \subseteq A\subseteq \mathbb{R} \leftarrow$

$\leftarrow A-\mathbb{N}\subseteq \mathbb{R} \leftarrow A-\mathbb{N}\in P(\mathbb{R}) \leftarrow f(A)\in P(\mathbb{R})$

f שלמה.

f חח"ע:

נניח: $f(A_1)=f(A_2)$

צ"ל: $A_1=A_2$

$f(A_1)=f(A_2) \Leftarrow A_2-\mathbb{N} = A_1-\mathbb{N}$

דוגמא נגדית:

$f(\{1\})=\emptyset \qquad f(\{2\})=\emptyset$

$\{1\}\neq\{2\}$

f לא חח"ע.

f על:

$f(A)=\{1\}$ אין מקור כי $A-\mathbb{N}\neq\{1\}$

לכן f לא על.

$f: P(\mathbb{N}) \to P(\mathbb{N})\times P(\mathbb{N})$ לכל $A\in P(\mathbb{N})$

$f(A)=(\bar{A},\bar{A})$

פתרון:

f שלמה:

לכל $A\in P(\mathbb{N})$ מתקיים $A\subseteq \mathbb{N} \leftarrow \bar{A}=\mathbb{N}-A \leftarrow$

$\leftarrow \bar{A}\subseteq\mathbb{N} \leftarrow \bar{A}\in P(\mathbb{N}) \leftarrow (\bar{A},\bar{A})\in P(\mathbb{N})\times P(\mathbb{N}) \leftarrow$

$\leftarrow f(A)\in P(\mathbb{N})\times P(\mathbb{N})$

לכן f שלמה.

f חח"ע:

נניח: $f(A_1)=f(A_2)$

צ"ל: $A_1=A_2$

3.

$\overline{A_1}=\overline{A_2} \leftarrow (\overline{A_1},\overline{A_1})=(\overline{A_2},\overline{A_2}) \leftarrow f(A_1)=f(A_2)$

f חח"ע.

f על:

לכל $(y_1,y_2)\in P(N)\times P(N)$

צריך למצוא $x\in P(N)$ כך ש-:

$\leftarrow (\bar{x},\bar{x})=(y_1,y_2) \leftarrow f(x)=(y_1,y_2)$

$y_1=y_2 \leftarrow \bar{x}=y_2$ וגם $\bar{x}=y_1 \leftarrow$

אין תנאי כזה.

דוגמא נגדית:

נקח $y_1\neq y_2$

למשל $y_1=\{1\}$

$y_2=\{2\}$

$\leftarrow (\bar{x},\bar{x})=(\{1\},\{2\}) \leftarrow f(x)=(\{1\},\{2\})$

סתירה $\{1\}=\{2\} \leftarrow \bar{x}=\{2\}$ וגם $\bar{x}=\{1\} \leftarrow$

$f(x)=(\{1\},\{2\})$ אין מקור.

לכן f לא על.

$A,B\in P(N)$ לכל $f:P(N)\longrightarrow P(N)\times P(N)$

$f((A,B))=(A\cup B, A\cap B)$

פתרון:

f שלמה:

וגם $A\cup B\subseteq N \leftarrow A,B\subseteq N$ מתקיים $A,B\in P(N)$ לכל

$\leftarrow A\cap B\in P(N)$ וגם $A\cup B\in P(N) \leftarrow A\cap B\subseteq N$

$f((A,B))\in P(N)\times P(N) \leftarrow (A\cup B, A\cap B)\in P(N)\times P(N)$

f שלמה.

f חח"ע:

נתון: $f((A_2,B_2)) = f((A_1,B_1))$

צ"ל: $(A_2,B_2)=(A_1,B_1)$

צ"ל: $A_1=A_2$ וגם $B_1=B_2$.

$$f((A_1,B_1)) = f((A_2,B_2)) \rightarrow (A_1\cup B_1, A_1\cap B_1)=(A_2\cup B_2, A_2\cap B_2)$$

$$A_1\cup B_1 = A_2\cup B_2$$

$$A_1\cap B_1 = A_2\cap B_2$$

דוגמא נגדית:

$A_1=\{1\}$ $\neq$ $A_2=\{1,2\}$; $B_1=\{2\}$ $\neq$ $B_2=\emptyset$

$A_1\cup B_1=\{1,2\}$; $A_2\cup B_2=\{1,2\}$

$A_1\cap B_1=\emptyset$; $A_2\cap B_2=\emptyset$

f לא חח"ע.

f על:

לכל $Y_1,Y_2\in P(N)$ צריך למצוא $X_1,X_2\in P(N)$ כך ש-:

$$f((X_1,X_2)) = f((Y_1,Y_2)) \rightarrow$$

$$(X_1\cup X_2, X_1\cap X_2)=(Y_1,Y_2)$$

$\leftarrow$ $X_1\cap X_2=Y_1$ וגם $X_1\cap X_2=Y_2$

לא יכול להיות Y_1 תהיה קבוצה עם מעט איברים Y תהיה

קבוצה עם הרבה איברים

דוגמא נגדית:

$Y_1=\emptyset$; $Y_2=N$

$$f((X_1,X_2))=(\emptyset, N) \rightarrow (X_1\cup X_2, X_1\cap X_2)=(\emptyset, N)$$

$\leftarrow X_1\cup X_2=\emptyset \leftarrow X_1=\emptyset$ וגם $X_2=\emptyset$

גם $\leftarrow X_1\cap X_2=N \leftarrow X_1=N$ וגם $X_2=N$

$\rightarrow$ סתירה!

לכן f לא על.

דיסקרטית - תרגול 6:

פונקציות:

תזכורת:

יהיו $f:B\to C$ $g:A\to B$ פונקציות.

1. $f\circ g: A\to C$ פונקציה.

כך שלכל $x\in A$ מתקיים $(f\circ g)(x)=f(g(x))$

2. f על C:

לכל $y\in C$ קיים $x\in B$ כך ש- $f(x)=y$

3. f חח"ע:

אם $f(x_1)=f(x_2)$

אז $x_1=x_2$

תרגיל:

יהיו $f:B\to C$ ו- $g:A\to B$ פונקציות שלמות. הוכח או

סתור ע"י דוגמא נגדית:

1. אם f על C וגם g על B אז $f\circ g$ על C.

פתרון:

יהיו: f על ו- g על

צ"ל: $f\circ g$ על.

צ"ל: לכל $z\in C$ קיים $x\in A$ כך ש- $(f\circ g)(x)=z$

$\leftarrow$ $f(g(x))=z$

f על $\leftarrow$ ש $z\in C$ קיים $y\in B$ כך ש- $f(y)=z$

g על $\leftarrow$ ש $y\in B$ קיים $x\in A$ כך ש- $g(x)=y$ $\leftarrow$

$\leftarrow$ לכל $z\in C$ קיים $x\in A$ כך ש- $f(g(x))=z$ לכן $f\circ g$ על.

2. אם $f\circ g$ על אז f על.

יהי: $f\circ g$ על C

צ"ל: f על C

צ"ל: לכל $z\in C$ קיים $y\in B$ כך ש- $f(y)=z$

$f\circ g$ על $\leftarrow$ לכל $z\in C$ קיים $x\in A$ כך ש- $(f\circ g)(x)=z$

1. $\leftarrow$ לכל $z\in C$ קיים $x\in A$ כך ש- $f(g(x))=z$

← סימון) $g(x)=y$ נקבל f $z\in C$ קיים $g(x)=y\in B$ כך

ש- $f(y)=f(g(x))=z$ ← לכן $z\in C$ קיים $y\in B$ כך ש-

$f(y)=z$ לכן f על.

3 אם $f\circ g$ על אז g על.

נתון: $f\circ g$ על

צ"ל: g על.

צ"ל: לכל $y\in B$ קיים $x\in A$ כך ש- $g(x)=y$.

$f\circ g$ על ← לכל $z\in C$ קיים $x\in A$ כך ש- $(f\circ g)(x)=z$

← לכל $z\in C$ קיים $x\in A$ כך ש- $f(g(x))=z$.

דוגמא נגדית:

$A=\{1\}$ $B=\{2,3\}$ $C=\{4\}$

$g:A\to B$ לא על. $f:B\to C$

$g(1)=2$ $f(2)=4$

(אין מקור ← $g(x)=3$) לכן לא על $f(3)=4$

$f\circ g:A\to C$ על

$(f\circ g)(1)=f(g(1))=f(2)=4$

$f\circ g$ על g לא על.

4 אם $f\circ g$ על וגם f חח"ע אז g על:

פתרון:

נתון: 1) $f\circ g$ על 2) f חח"ע

צ"ל: g על.

$f\circ g$ על ← לכל $z\in C$ קיים $x\in A$ כך ש- $(f\circ g)(x)=z$

← $f(g(x))=z$

$f\circ g$ על $\xrightarrow{\text{הוכחה 2}}$ f על ← לכל $z\in C$ קיים $y\in B$ כך ש- $f(y)=z$

קיבלנו $f(g(x))=z$ וגם $f(y)=z$ ← $f(g(x))=f(y)$ $\xrightarrow{\text{נתון 2}}$ $g(x)=y$

לכן g על.

5. אם f חח"ע וגם g חח"ע אז $f\circ g$ חח"ע:

פתרון:

נתון: f חח"ע וגם g חח"ע

צ"ל: $f\circ g$ חח"ע.

נתון: $(f\circ g)(x_1)=(f\circ g)(x_2)$

צ"ל: $x_1=x_2$

$$(f\circ g)(x_1)=f\circ g(x_2) \rightarrow f(g(x_1))=f(g(x_2)) \xrightarrow[f\text{ חח"ע}]{\text{נתון}} g(x_1)=g(x_2)$$

$$\xrightarrow[g\text{ חח"ע}]{\text{נתון}} x_1=x_2$$ ולכן $f\circ g$ חח"ע.

6. אם $f\circ g$ חח"ע אז g חח"ע:

פתרון:

$f:B\to C\ ,\ g:A\to B$

נתון: $f\circ g$ חח"ע

צ"ל: g חח"ע.

נתון: $g(x_1)=g(x_2)$

צ"ל: $x_1=x_2$

$$g(x_1)=g(x_2) \xrightarrow{f} f(g(x_1))=f(g(x_2)) \rightarrow (f\circ g)(x_1)=(f\circ g)(x_2)$$

$$\xrightarrow{\text{נתון}} x_1=x_2$$

ולכן g חח"ע.

7. אם $f\circ g$ חח"ע אז f חח"ע.

פתרון:

$f:B\to C\ ,\ g:A\to B$

נתון: $f\circ g$ חח"ע.

צ"ל: f חח"ע

נתון: $f(x_1)=f(x_2)$

צ"ל: $x_1=x_2$

$f(x_1)=f(x_2)\in C$

דוגמא נגדית:

$A=\{1\}$ $B=\{2,3\}$ $C=\{4\}$

$g:A\to B$ חח"ע (לפי הגד) $g(1)=2$

$f:B\to C$ לא חח"ע (כי) $f(2)=4\ ,\ f(3)=4$

3.

(לא) חח"ע $f\circ g: A\to C$

$(f\circ g)(1)=f(g(1))=f(2)=4$

לכן f לא חח"ע

ג. אם $f\circ g$ חח"ע וגם g על אז f חח"ע:

נתון: $f\circ g$ חח"ע

g על

צ"ל: f חח"ע.

נתון: $f(x_1)=f(x_2)$

צ"ל: $x_1=x_2$

פתרון:

$f(x_1)=f(x_2)$. $x_1,x_2\in B$ וגם g על $\leftarrow$ קיימים $a_1,a_2\in A$ כך ש-

$g(a_1)=x_1$ וגם $g(a_2)=x_2$ $\leftarrow$ $f(x_1)=f(x_2)$ וגם

$g(a_1)=x_1$ וגם $g(a_2)=x_2$ $\leftarrow$ $f(g(a_1))=f(g(a_2))$ $\leftarrow$

$\leftarrow$ $(f\circ g)(a_1)=(f\circ g)(a_2)$ $\xrightarrow[\text{חח"ע}]{f\circ g \text{ נתון}}$ $a_1=a_2$ $\xrightarrow[g]{\text{פונקציה}}$ $g(a_1)=g(a_2)$

$\leftarrow$ $x_1=x_2$ לכן f חח"ע.

שאלה 3:

ד. נתון: $f: C\to D$, $g: A\to B$ פונקציות

$h: A\times C \longleftrightarrow B\times D$

$h((a,b))=(g(a),f(b))$

א. נתון: f חח"ע g חח"ע

צ"ל: h חח"ע

נתון: $h((a_1,b_1))=h((a_2,b_2))$

צ"ל: $(a_1,b_1)=(a_2,b_2)$

צ"ל: $a_1=a_2$ וגם $b_1=b_2$

$h((a_1,b_1))=h((a_2,b_2))$ $\leftarrow$ $(g(a_1),f(b_1))=(g(a_2),f(b_2))$ $\leftarrow$

$\leftarrow$ $g(a_1)=g(a_2)$ וגם $f(b_1)=f(b_2)$ $\xleftarrow[\text{נתון}]{}$ $a_1=a_2$ וגם $b_1=b_2$

חח"ע $g \cdot f$

נתון: h חח"ע

צ"ל: 1. f חח"ע

2. g חח"ע

נתון: $f(x_1)=f(x_2)$ וגם $g(y_1)=g(y_2)$

צ"ל: $x_1=x_2$ וגם $y_1=y_2$

$f(x_1)=f(x_2)$ וגם $g(y_1)=g(y_2)$ $\rightarrow$ $(g(y_1),f(x_1)) = (g(y_2),f(x_2))$

$\rightarrow h((y_2,x_2)) = h((y_1,x_1))$ $\rightarrow$ $(y_1,x_1)=(y_2,x_2)$

h חח"ע

$\rightarrow$ $y_1=y_2$ וגם $x_1=x_2$

5.

תרגיל 4

1. נתון $f:B\to C$ וגם $g:A\to B$ פונקציות שלמות.

הוכח או סתור (ע"י דוגמא נגדית).

א. אם f הפיכה אז $f\circ g$ הפיכה ?

ב. אם g הפיכה אז $f\circ g$ הפיכה ?

ג. אם $f\circ g$ הפיכה אז f הפיכה ?

ד. אם $f\circ g$ הפיכה אז g הפיכה ?

2. נתון $f:A\to A$ פונקציה שלמה.

הוכח או סתור (ע"י דוגמא נגדית)

א. אם f הפיכה אז $f^2=f\circ f$ הפיכה ?

ב. אם $f^2=f\circ f$ הפיכה אז f הפיכה ?

ג. אם f הפיכה אז f^{-1} הפיכה ?

3. נתונות $f:A\to A$ וגם $g:A\to A$ פונקציות שלמות.

הוכח או סתור (ע"י דוגמא נגדית)

א. אם f וגם g הפיכות אז $f\circ g\circ f$ הפיכה ?

ד. אם $f\circ g\circ f$ הפיכה אז $f\circ g$ הפיכה ?

ה. אם $f\circ g\circ f$ הפיכה אז $g\circ f$ הפיכה ?

ב. אם $f\circ g\circ f$ הפיכה אז f הפיכה ?

ג. אם $f\circ g\circ f$ הפיכה אז g הפיכה ?

4. נתון: $f:\Re-\{0\}\to\Re-\{4\}$ מוגדרת ע"י לכל $x\in\Re-\{0\}$

$$f(x)=\frac{8x-5}{2x}\ .$$

א. הוכח f הפיכה.

ב. מצא f^{-1}.

5. נתון: $f:\{x\in\Re\mid x\ge 0\}\to\{y\in\Re\mid y\ge 1\}$ מוגדרת $f(x)=x^2+x+1$.

א. הוכח f הפיכה.

ב. מצא f^{-1}.

6. יהיו $f:A\to A$ $g:A\to A$ פונקציות כך ש $f\circ g$ חח"ע ו $g\circ f$ על.

הוכיחו:

א. g הפיכה.

ב. f הפיכה.

ג. $f\circ g$ הפיכה

ד. $g\circ f$ הפיכה

7. תהיינה $f:A\to A$, $g:A\to A$ פונקציות שלמות.

הוכח או סתור

אם $f\circ g$ וגם $g\circ f$ הפיכות אז f הפיכה ?

8. יהי $f:A\to B$ פונקציה. ויהיו $g:B\to A$ ו $h:B\to A$ פונקציות כך ש $f\circ g=I_B$ וגם $h\circ f=I_A$ הוכח :

א. $h=g$

ב. f הפיכה כך ש $f^{-1}=g$.

9. תהיינה $f:A\to A$ ו- $g:A\to A$ פונקציות,
כך ש-
$f\circ g$ חח"ע וגם $g\circ f$ על.

הוכיחו:

א. $f\circ g$ על.
ב. $g\circ f$ חח"ע.

10. תהיינה $f:A\to A$ ו- $g:A\to A$ פונקציות,
כך ש-
$g\circ f$ הפיכה.

הוכיח או סתור (ע"י דוגמא נגדית):

א. f על.
ב. f חח"ע.
ג. g על.
ד. g חח"ע.

11. תהי $A=\{f:\mathrm{N}\to\mathrm{N}\mid f$ פונקציה שלמה$\}$

נגדיר יחס שקילות R על A: $R=\{\ (f,g)\in A\times A\ \mid\ \mathrm{R(f)}=\mathrm{R(g)}\ \}$

א. מהי מחלקת השקילות של $\mathrm{I_N}$ ($\mathrm{I_N}$ פונקצית הזהות על N).
ב. האם כל הפונקציות הקבועות ב- A במחלקת שקילות אחת?
- אם כן, מה עוצמתה.
- אם לא, מה עוצמת אוסף כל מחלקות השקילות של הפונקציות הקבועות.

($f:\mathrm{N}\to\mathrm{N}$ נקראת פונקציה קבועה אם לכל $x\in N$, $f(x)=k$ עבור איזשהו $k\in N$)

ג. מה עוצמת הקבוצה A/R, נמקו.
ד. נגדיר יחס נוסף על A: $T=\{\ (f,g)\in A\times A\ \mid\ \mathrm{R(f)}\subseteq\mathrm{R(g)}\ \}$
האם T יחס סדר חלקי? נמקו.

12. תהי $A=\{f:\mathrm{N}\to\mathrm{N}\mid f$ פונקציה שלמה$\}$

$f(1)=g(1)$

נגדיר יחס שקילות R על A: $R=\{\ (f,g)\in A\times A\ \mid\ f(1)=g(1)\ \}$

א. מהי מחלקת השקילות של $\mathrm{I_N}$ ($\mathrm{I_N}$ פונקצית הזהות על N).
ב. האם כל הפונקציות הקבועות ב- A במחלקת שקילות אחת?
- אם כן, מה עוצמתה.

- אם לא, מה עוצמת אוסף כל מחלקות השקילות של הפונקציות הקבועות.

($f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ נקראת פונקציה קבועה אם לכל $x \in N$, $f(x) = k$ עבור איזשהו $k \in N$)

ג. מה עוצמת הקבוצה A/R , נמקו.

ד. נגדיר יחס נוסף על A: $T = \{ (f,g) \in A \times A \mid f(1) \le g(1) \}$

האם T יחס סדר חלקי? נמקו.

13. נגדיר : $A = \Re \times \Re$. כאשר $\Re$ מספרים ממשים .

נגדיר : $R = \{((a,b),(c,d)) \in A \times A \mid |a| + |b| = |c| + |d|\}$

א. מצאו מחלקות שקילות : $[(2,1)]_R$ וגם $[(0,0)]_R$

ומצא את העוצמה של כל מחלקה .

ב. האם $[(2,1)]_R$ פונקציה מ $\Re$ ל $\Re$? נמק

ג. מהי קבוצה המנה $\Re \times \Re / R$? מהי העוצמה של קבוצה המנה .נמק

נגדיר : $S = \{((a,b),(c,d)) \in A \times A \mid |a| + |b| \le |c| + |d|\}$

ד. האם S יחס סדר ? נמק את תשובתך .

תרגיל 3

1. נתון $f:B\to C$ וגם $g:A\to B$ פונקציות שלמות.

הוכח או סתור (ע"י דוגמא נגדית).

א. אם f על אז $\cancel{g\circ f}$ $f\circ g$ על ?

ב. אם g על אז $\cancel{g\circ f}$ $f\circ g$ על ?

ג. אם f חח"ע אז $\cancel{g\circ f}$ $f\circ g$ חח"ע ?

ד. אם g חח"ע אז $\cancel{g\circ f}$ $f\circ g$ חח"ע ?

2. נתון $f:A\to A$ פונקציה שלמה.

הוכח או סתור (ע"י דוגמא נגדית)

א. אם f על אז $f^2=f\circ f$ על ?

ב. אם $f^2=f\circ f$ על אז f על ?

ג. אם f חח"ע אז $f^2=f\circ f$ חח"ע ?

ד. אם $f^2=f\circ f$ חח"ע אז f חח"ע ?

3. יהיו $f:B\to C$ $g:A\to B$ פונקציות כך ש $g\circ f$ חח״ע ו g על.

הוכיחו או הפרך (ע״י דוגמא נגדית):

א. g חח״ע .

ב. f חח״ע .

ג. f על .

4. יהיו $f:B\to C$ $g:A\to B$ פונקציות .
הוכיחו או תנו דוגמא נגדית:

א. אם g חח"ע ו f על אז $g\circ f$ על .

נגדיר $h:A\times B\to B\times C$ ע"י כל $a\in A$ ו $b\in B$

$$h((a,b))=(g(a),f(b))$$

ב. אם f חח"ע וגם g חח"ע אז h חח"ע .

5. תהינה $f:B\to C$ $g:A\to B$ פונקציות.

הוכיחו או תנו דוגמא נגדית:

א. אם g חח"ע ו- f על אז $g\circ f$ חח"ע.

ב. נגדיר $h:A\times B\to B\times C$ באופן הבא: לכל $a\in A$ ו- $b\in B$

$$h((a,b))=(g(a),f(b))$$

אם f על וגם g על אז h על.

6. תהי $f:A\to A$ פונקציה. הוכיחו או תנו דוגמא נגדית:

א. אם f^3 על אז f^2 על .

ב. אם f^2 על אז f^3 על .

7. תהי $f:A\to A$ פונקציה. הוכיחו או תנו דוגמא נגדית:

א. אם f^3 חח"ע אז f^2 חח"ע .

ב. אם f^2 חח"ע אז f^3 חח"ע .

8. יהיו $f:C\to D$ $g:A\to B$ פונקציות.

נגדיר $h:A\times C\to B\times D$ ע"י כל $a\in A$ ו $b\in C$

$$h((a,b))=(g(a),f(b))$$

הוכח:

א. אם f חח"ע וגם g חח"ע אז h חח"ע.

ב. אם h חח"ע אז f חח"ע וגם g חח"ע.

9. יהיו $f:B\to D$ $g:A\to C$ פונקציות.

נגדיר $h:A\times B\to C\times D$ באופן הבא:

$$h((a,b))=(g(a),f(b))$$

הוכיחו: א. אם f על וגם g על אז h על

ב. אם h על אז f על וגם g על

10. יהיו $f:A\times B\to D$ $g:A\to C$ פונקציות.

נגדיר $h:A\times B\to C\times D$ באופן הבא:

$$h((a,b))=(g(a),f(a,b))$$

הוכיחו או סתרו:

א. אם f חח"ע וגם g חח"ע אז h חח"ע.

ב. אם f על וגם g על אז h על.

ג. אם h חח"ע אז f חח"ע.

ד. אם h חח"ע אז g חח"ע.

ה. אם h על אז f על.

ו. אם h על אז g על.

תרגיל 5

הוכח את שיויונים באים :

1. $|\mathrm{N}\times\mathrm{N}\times\mathrm{N}| = |\mathrm{N}|$
2. $|[0,1)| = |(0,1]|$
3. $|(0,1]| = |[1,\infty)|$
4. $|(1,2)| = |[1,2]|$
5. $|(1,2)| = |[1,2)|$
6. $|(1,2)| = |(a,b)|$ כאשר $a<b$

דיסקרטית - תרגול 6:

פונקציה:

הגדרה:

פונקציה הזהות I_A היא $I_A : A \to A$ לכל $x \in A$ שמקיים
$I_A(x) = x$

דוגמא:

$A = \{1, 2, 3\}$

$I_A(3) = 3 \quad I_A(2) = 2 \quad I_A(1) = 1$

הגדרה:

יהי $f: A \to B$ פונקציה (שלמה) נקראת פונקציה הפיכה אם
קיימת $g: B \to A$ פונקציה כך ש-:

1) $f \circ g = I_B$

2) $g \circ f = I_A$

סימון $g = f^{-1}$

דוגמא:

$A = \{a, b, c\} \qquad B = \{1, 2, 3\}$

נתון: $f: A \to B$

$f(a) = 3$

$f(b) = 1$

$f(c) = 2$

נגדיר $g: B \to A$

$g(3) = a$

$g(1) = b$

$g(2) = c$

$(g \circ f)(a) = g(f(a)) = g(3) = a \qquad (f \circ g)(1) = f(g(1)) = f(b) = 1$

$(g \circ f)(b) = g(f(b)) = g(1) = b \qquad (f \circ g)(2) = f(g(2)) = f(c) = 2$

$(g \circ f)(c) = g(f(c)) = g(2) = c \qquad (f \circ g)(3) = f(g(3)) = f(a) = 3$

$g \circ f = I_A \qquad f^{-1} = g \qquad f \circ g = I_B$

f הפיכה

משפט:

יהי $f:A\to B$ פונקציה (שלמה) אז f הפיכה $\leftrightarrow$ f חח"ע ועל.

דוגמא:

$$f:\mathbb{R}-\{2\}\longrightarrow\mathbb{R}-\{3\}$$

$$f(x)=\frac{3x-1}{x-2}$$

הוכח f הפיכה ומצא f^{-1}

צ"ל: f חח"ע ועל.

f חח"ע:

נתון: $f(x_1)=f(x_2)$

צ"ל: $x_1=x_2$

$f(x_1)=f(x_2) \Leftarrow \frac{3x_1-1}{x_1-2}=\frac{3x_2-1}{x_2-2} \Leftarrow (3x_1-1)(x_2-2)=(3x_2-1)(x_1-2)$

$\Leftarrow 3x_1x_2-6x_1-x_2+2=3x_1x_2-6x_2-x_1+2 \Leftarrow 6x_2-x_2=6x_1-x_1 \Leftarrow$

$\Leftarrow 5x_1=5x_2 \Leftarrow x_1=x_2$

f על:

לכל $y\neq 3$ צריך למצוא $x\neq 2$ כך ש- $f(x)=y$ $\Leftarrow$

$\Leftarrow \frac{3x-1}{x-2} \Leftarrow 3x-1=y(x-2) \Leftarrow 3x-1=xy-2y \Leftarrow$

$\Leftarrow 3x-xy=1-2y \Leftarrow x(3-y)=1-2y \quad (y\neq 3) \Leftarrow$

$\Leftarrow x=\frac{1-2y}{3-y}$

לכן f הפיכה.

$$f^{-1}:\mathbb{R}-\{3\}\longrightarrow\mathbb{R}-\{2\}$$

$$f^{-1}(y)=\frac{1-2y}{3-y}$$

$$f^{-1}(x)=\frac{1-2x}{3-x}$$

משפט:

יהי $f: B \to C$ ו- $g: A \to B$ פונקציות הפיכות. אז:

$f \circ g$ הפיכה וגם: $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$

תרגיל:

יהיו $f: B \to C$ ו- $g: A \to B$ פונקציות.

הוכח או סתור ע"י דוגמא נגדית:

1. אם $f \circ g$ הפיכה אז f הפיכה.
2. אם $f \circ g$ הפיכה אז g הפיכה.

פתרון:

$f \circ g$ הפיכה $\leftarrow$ $f \circ g$ חח"ע ועל.

$f \circ g$ חח"ע $\leftarrow$ g חח"ע (לא f חח"ע)

$f \circ g$ על $\leftarrow$ f על (לא g על).

דוגמא נגדית:

$C = \{4\}$ $\quad$ $B = \{2, 3\}$ $\quad$ $A = \{1\}$

$f: B \to C$ לא חח"ע

$f(2) = 4$ לכן לא הפיכה

$f(3) = 4$

$g: A \to B$ לא על

$g(1) = 2$ לכן לא הפיכה.

$f \circ g: A \to C$ חח"ע ועל

$(f \circ g)(1) = f(g(1)) = f(2) = 4$

לכן $f \circ g$ הפיכה.

הערה!

אם $f \circ g$ הפיכה לא נקבל $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$ כי יכול להיות

f ו- g לא הפיכות. אין f^{-1} ו- g^{-1}

תרגיל: (ממבחן!)

נתון $f: A\to A$ ו- $g: A\to A$ הוכח או סתור ע"י דוגמא נגדית

אם $f\circ g$ הפיכה אז f הפיכה ו- g הפיכה.

משפט:

נתון $|A|=n$ ו- $f: A\to A$ פונקציה f חח"ע $\leftrightarrow$ f על.

דוגמא נגדית: (אסור שתהיה סופית)

$$g: \mathbb{N}\to \mathbb{N}$$

$$g(n)=n^2$$

$$f: \mathbb{N}\to \mathbb{N}$$

$f(n)=\lfloor\sqrt{n}\rfloor$ על, לא חח"ע.

$f(2)=f(3)=1$ לכן לא הפיכה.

$$(f\circ g)(n)=f(g(n))=$$
$$=f(n^2)=\lfloor\sqrt{n^2}\rfloor=\lfloor n\rfloor=n$$

$$f\circ g=I_{\mathbb{N}}$$

לכן $f\circ g$ הפיכה.

$$(g\circ f)(n)=g(f(n))=g(\lfloor\sqrt{n}\rfloor)=\lfloor\sqrt{n}\rfloor^2$$

$$g\circ f\neq I_{\mathbb{N}}$$

$$(g\circ f)(2)=g(f(2))=1$$
$$(g\circ f)(3)=g(f(3))=g(1)=1$$

$g\circ f$ לא חח"ע

לכן לא הפיכה.

דף: "תרגיל 4"

ז. נתון $f:A\to A$ ו- $g:A\to A$ פונקציות (שלמות)

א. נתון: f הפיכה ו- g הפיכה

צ"ל: $f\circ g\circ f$ הפיכה.

פתרון:

f הפיכה ו- g הפיכה $\xleftarrow{\text{משפט}}$ $g\circ f$ הפיכה וגם f הפיכה ←

$\xleftarrow{\text{משפט}}$ $f\circ(g\circ f)$ הפיכה.

(ממבחן!)

ב. נתון: $f\circ g\circ f$ הפיכה

צ"ל: f הפיכה.

צ"ל: f חח"ע ועל.

$f\circ g\circ f$ הפיכה ← $f\circ g\circ f$ חח"ע ועל

$f\circ g\circ f$ חח"ע ← $(f\circ g)\circ f$ חח"ע ← f חח"ע

$f\circ g\circ f$ על ← $f\circ(g\circ f)$ על ← f על

← f הפיכה.

ג. נתון: $f\circ g\circ f$ הפיכה

צ"ל: g הפיכה.

פתרון: לפי סעיף ב' f הפיכה. ← קיימת f^{-1} רק ש- $f\circ f^{-1}=I_A$

וגם $f^{-1}\circ f=I_A$ ← f^{-1} הפיכה $f=(f^{-1})^{-1}$ $\xleftarrow{\text{לפי משפט}}$

← $f^{-1}\circ(f\circ g\circ f)\circ f^{-1}$ הפיכה ← $(f^{-1}\circ f)\circ g\circ(f\circ f^{-1})$ ←

← $I_A\circ g\circ I_A$ ← g

ד. נתון: $f\circ g\circ f$ הפיכה.

צ"ל: $f\circ g$ הפיכה וגם $g\circ f$ הפיכה.

$f\circ g\circ f$ הפיכה $\xleftarrow[\text{ב', ג'}]{\text{סעיפים}}$ f, g הפיכות $\xleftarrow{\text{משפט}}$ $f\circ g$ הפיכה ו- $g\circ f$ הפיכה.

8. יהי $f:A\to B$ פונקציה ויהי $g:B\to A$ ו- $h:B\to A$ פונקציות.

רק ש- $f\circ g=I_B$ וגם $h\circ f=I_A$ הוכח:

א. $h=g$

ב. f הפיכה רק ש- $f^{-1}=g$

9.

דרך I:

$f\circ g=I_B \rightarrow$ $f\circ g$ הפיכה $\rightarrow$ $f\circ g$ חח"ע $\rightarrow$ f על.

$h\circ f=I_A \rightarrow$ $h\circ f$ הפיכה $\rightarrow$ $h\circ f$ חח"ע $\rightarrow$ f חח"ע $\Big\} \rightarrow$

$\rightarrow$ f חח"ע ועל $\rightarrow$ f הפיכה קיימת f^{-1}.

$f\circ g=I_B \rightarrow f^{-1}\circ I_B = f^{-1}\circ(f\circ g) \rightarrow f^{-1}=(f^{-1}\circ f)\circ g \rightarrow$

$I_A\circ g=f^{-1} \rightarrow g=f^{-1}$

$h\circ f=I_A \rightarrow (h\circ f)\circ f^{-1}=I_A\circ f^{-1} \rightarrow h\circ(f\circ f^{-1})=f^{-1} \rightarrow$

$\rightarrow h\circ I_B=f^{-1} \rightarrow h=f^{-1}$

$h=f^{-1}$ וגם $g=f^{-1} \rightarrow h=g$

דרך II:

א. $h=h\circ I_B \overset{(א)}{=} h\circ(f\circ g) \overset{\text{אסוצ}}{=} (h\circ f)\circ g=I_A\circ g=g$

ב. $f\circ g=I_B$ וגם $h\circ f=I_A \overset{(א)}{=} g\circ f \rightarrow$ f הפיכה $g=f^{-1}$

דיסקרטית - תרגול ד:

עוצמה של קבוצה:

הגדרה:

יהיו A ו- B קבוצות. (נאמר שעוצמה של A שווה לעוצמה של B

אם קיימת $f: A \to B$ פונקציה חח"ע ועל (נסמן $|A|=|B|$.

דוגמא:

$$B=\{a,b,c\} \quad , \quad A=\{1,2,3\}$$

$f: A \to B$ חח"ע ועל

$f(1)=a$

$f(2)=b$

$f(3)=c$ לכן $|A|=|B|=3$

תזכורת:

$[a,b]=\{x\in \mathbb{R} \mid a\le x\le b\}$ קטע סגור.

תרגיל:

הוכח: $|[2,4]|=|[5,9]|$

הוכחה:

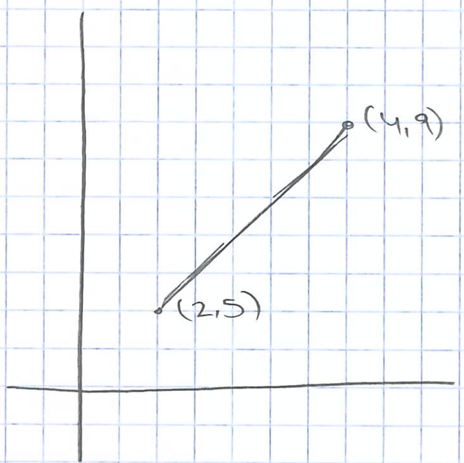
קיבלנו 2 נקודות $(2,5)$ $(4,9)$

משוואת הקו ישר שעובר דרכם

שיפוע $m=\frac{9-5}{4-2}=\frac{4}{2}=2$

$y-5=2(x-2)$

$y=2x+1$



נגדיר $f:[2,4]\to[5,9]$

$f(x)=2x+1$

f חח"ע

נ"ל: $f(x_1)=f(x_2)$

צ"ל: $x_1=x_2$

$f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow 2x_1+1=2x_2+1 \Rightarrow 2x_1=2x_2 \Rightarrow x_1=x_2$

f על:

לכל $5\le y\le 9$ צריך למצוא $2\le x\le 4$ כך ש- $f(x)=y$ –

$\leftarrow 2x+1=y \leftarrow x=\frac{y-1}{2}$

$5\le y\le 9 \leftarrow 4\le y-1\le 8 \leftarrow 2\le \frac{y-1}{2}\le 4 \leftarrow 2\le x\le 4$

תזכורת:

$(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})=\{x\in\mathbb{R} \mid -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\}$ קטע פתוח.

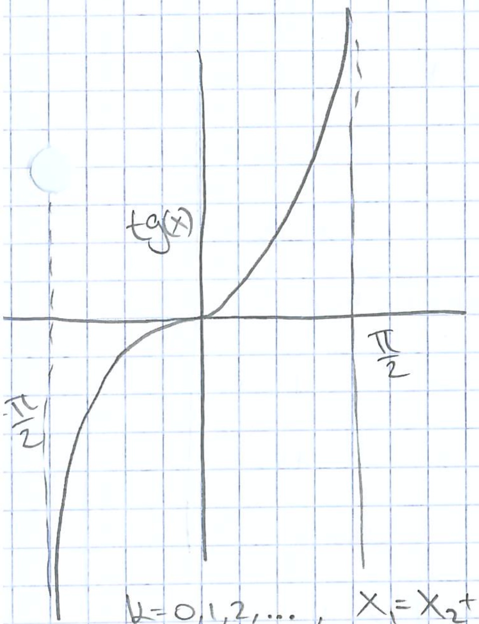
תרגיל:

הוכח $|(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})|=|\mathbb{R}|$

הוכחה:

נגדיר $f:(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})\to\mathbb{R}$

$f(x)=\tan(x)$



f חח"ע:

נניח: $f(x_1)=f(x_2)$

צ"ל: $x_1=x_2$

$f(x_1)=f(x_2) \leftarrow \tan(x_1)=\tan(x_2) \leftarrow x_1=x_2+2\pi k,\ k=0,1,2,\dots$

כך ש- $-\frac{\pi}{2}\le x_1\le\frac{\pi}{2}$ וגם $-\frac{\pi}{2}\le x_2\le\frac{\pi}{2}$ $\leftarrow k=0$ לכן $x_1=x_2$.

דרך II:

$f'(x)=\frac{1}{\cos^2(x)}>0 \leftarrow$ f עולה ממש $\leftarrow$ f חח"ע.

f על:

tg(x) רציפה בקטע $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ וכל הטווח כי $\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}} tg(x)=-\infty$

ו- $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} tg(x)=\infty \leftarrow x=\frac{\pi}{2}$ ו- $x=-\frac{\pi}{2}$ אסימפטוטות

אנכיות.

לכן f על.

רציפה ← על

עולה ממש ← חח"ע.

תזכורת:

$$[0,1)=\{x\in\mathbb{R} \mid 0\le x<1\}$$

הוכח:

$$|[0,1)| = |[0,1]|$$

הוכחה:

נגדיר $f:[0,1]\to[0,1)$

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2} & x=1\\ \frac{1}{n+1} & x=\frac{1}{n},\ n=2,3,\ldots\in\mathbb{N}\\ x & x\ne 1,\frac{1}{n}\ \ n=2,3,\ldots\in\mathbb{N}\end{cases}$$

$f(0)=0$

$f(1)=\frac{1}{2}$

$f(\frac{1}{2})=\frac{1}{3}$

$f(\frac{1}{10})=\frac{1}{11}$

$f(\frac{1}{100})=\frac{1}{101}$

$f(\frac{2}{3})=\frac{2}{3}$

$f(\frac{1}{e})=\frac{1}{e}$

לפי בנייה f חח"ע ועל.

תרגיל:

הוכח $|[0,1]| = |(0,1)|$

הוכחה:

$$f:[0,1]\to(0,1)$$

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2} & x=1\\ \frac{1}{3} & x=0\\ \frac{1}{n+2} & x=\frac{1}{n},\ n=2,3,\ldots\in\mathbb{N}\\ x & x\ne 0,1,\frac{1}{n},\ n=2,3,\ldots\in\mathbb{N}\end{cases}$$

$f(0)=\frac{1}{3}$

$f(1)=\frac{1}{2}$

$f(\frac{1}{2})=\frac{1}{4}$

$f(\frac{1}{3})=\frac{1}{5}$

$f(\frac{1}{4})=\frac{1}{6}$

$f(\frac{2}{3})=\frac{2}{3}$

$f(\frac{3}{4})=\frac{3}{4}$

$f(\frac{1}{e})=\frac{1}{e}$

לפי בניה f חח"ע ועל. מסקנות:

$|[a,b]|=|(a,b)|$ לכל $a<b$

$|[a,b]|=|[c,d]|$ $a<b$ וכן $c<d$

$a<b$ $|[a,b]|=|(a,b)|=|[a,b)|=|[c,d]|$

כמו $|[2,4]|=|[5,9]|$.

קיבלנו $|\mathbb{R}| = |(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})|$

לפי המסקנה $|(a,b)| = |(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2})|$ כך ש- $a<b$

משפט יחס עוצמה הוא יחס טרנזיטיבי לכן $|(a,b)| = |\mathbb{R}|$

מסקנה:

$$|(a,b)| = |[a,b]| = |[a,b)| = |\mathbb{R}| = \aleph$$

תרגיל:

נגדיר: $A = \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{N}$ סדרה אינסופית.
(איברים שונים)

הוכח $|A| = |\mathbb{N}|$

דוגמא:

$A = \{2n\}_{n=1}^{\infty}$ כל הזוגיים

$|A| = |\mathbb{N}| (= \aleph_0) \leftarrow$ עוצמה של טבעיים

הוכחה:

נגדיר $f: \mathbb{N} \to A$

$f(n) = a_n$

f חח"ע

$f(n) = f(m) \leftarrow a_n = a_m \leftarrow n = m$

f על:

לכל $y \in A$ צריך למצוא $n \in \mathbb{N}$ כך ש- $f(n) = y$.

$y \in A \leftarrow$ קיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש- $a_n = y \leftarrow f(n) = y$.

תרגיל:

הוכח $|\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{N}|$

פתרון:

נגדיר: $A = \{2^n \cdot 3^m \mid n,m \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{N}$ קבוצה אינסופית

לפי תרגיל קודם $|A| = |\mathbb{N}|$

נגדיר $f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to A$

$f((n,m)) = 2^n \cdot 3^m$

f חח"ע:

יהי $f((n_2,m_2)) = f((n_1,m_1))$

צ"ל: $(n_2,m_2) = (n_1,m_1)$

צ"ל: $n_2=n_1$ וגם $m_2=m_1$

$f((n_2,m_2)) = f((n_1,m_1)) \leftarrow$ $x = 2^{n_2}\cdot 3^{m_2} = 2^{n_1}\cdot 3^{m_1}$

לפי יחידות הפירוק לראשוניים נקבל $n_1=n_2$ וגם $m_1=m_2$

f על:

לכל $y\in A$ צריך למצוא $(n,m)\in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ כך ש- $f((n,m))=y$

$y\in A \leftarrow$ קיימים $n,m\in \mathbb{N}$ כך ש- $2^n\cdot 3^m=y \leftarrow f((n,m))=y$

לכן $|\mathbb{N}\times\mathbb{N}|=|A|$ וגם $|\mathbb{N}|=|A| \leftarrow |\mathbb{N}\times\mathbb{N}|=|\mathbb{N}|$

תרגילים
לפרק אחד-עשר
אינדוקציה מתמטית

הוכחת נוסחאות

אינדוקציות רגילות

הערה: n, m ו-p מסמנים מספרים טבעיים.

הוכח באמצעות אינדוקציה מתמטית שלכל n טבעי מתקיים (סכומים):

1) $2 + 4 + 6 + \ldots + 2n = n(n+1)$

2) $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n}{2}(n+1)$

3) $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) = n^2$

4) $4 + 5 + 6 + \ldots + (n+3) = \frac{n}{2}(n+7)$

5) $2 + 5 + 8 + \ldots + (3n-1) = \frac{n}{2}(3n+1)$

6) $5 + 9 + 13 + \ldots + (4n+1) = n(2n+3)$

7) $3\cdot 2 + 6\cdot 3 + 9\cdot 4 + \ldots + 3n(n+1) = n(n+1)(n+2)$

8) $2\cdot 5 + 3\cdot 6 + 4\cdot 7 + \ldots + (n+1)(n+4) = \frac{n}{3}(n+4)(n+5)$

9) $1\cdot 4 + 2\cdot 5 + 3\cdot 6 + \ldots + n(n+3) = \frac{n}{3}(n+1)(n+5)$

10) $3\cdot 8 + 4\cdot 9 + 5\cdot 10 + \ldots + (n+2)(n+7) = \frac{n}{3}(n+7)(n+8)$

11) $4 + 20 + 48 + \ldots + (3n-1)2n = 2n^2(n+1)$

12) $5 + 12 + 21 + \ldots + n(n+4) = \frac{n}{6}(n+1)(2n+13)$

13) $1\cdot 3 + 2\cdot 4 + 3\cdot 5 + \ldots + n(n+2) = \frac{n}{6}(n+1)(2n+7)$

14) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n}{6}(n+1)(2n+1)$

נוסחאות נסיגה (אינדוקציה)

הוכח באינדוקציה שלכל n טבעי (התלכדות סדרות):

1) אם $a_1 = 2$, $a_{n+1} = a_n + 2n + 1$ אז $a_n = n^2 + 1$.

2) אם $a_1 = 4$, $a_{n+1} = a_n + 18n + 3$ אז $a_n = (3n - 1)^2$.

3) אם $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + n$ אז $a_n = \frac{1}{2}(n^2 - n + 2)$.

4) אם $a_1 = 0$, $a_{n+1} = a_n + 3n^2 + n$ אז $a_n = n^2(n - 1)$.

5) אם $a_1 = 2$, $a_{n+1} = a_n + 3n^2 + 3n$ אז $a_n = n^3 - n + 2$.

6) אם $a_1 = 2$, $a_{n+1} = a_n + 2n + 1 - 2(-1)^{n+1}$ אז $a_n = n^2 + (-1)^{n+1}$.

7) אם $a_1 = 0$, $a_{n+1} = \frac{n}{3}(2n^2 + 1) - a_n$ אז $a_n = \frac{n}{6}(n - 1)(2n - 1)$.

8) אם $a_1 = 3$, $a_{n+1} = a_n + (n + 1)(n + 3)$ אז $a_n = \frac{n}{6}(n + 1)(2n + 7)$.

9) אם $a_1 = 0$, $a_{n+1} = a_n + n(n + 1)^2$ אז $a_n = \frac{n}{12}(n - 1)(n + 1)(3n + 2)$.

10) אם $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + 2^n$ אז $a_n = 2^n - 1$.

11) אם $a_1 = 13$, $a_{n+1} = 3a_n + 10$ אז $a_n = 2 \cdot 3^{n+1} - 5$.

12) אם $a_1 = 6$, $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 2$ אז $a_n = 2^{2-n} + 4$.

13) אם $a_1 = 2$, $a_{n+1} = a_n + 2 \cdot 3^{n-1} + 1$ אז $a_n = 3^{n-1} + n$.

14) אם $a_1 = 6$, $a_{n+1} = 12 \cdot 5^n - 2n - 7 - a_n$ אז $a_n = 2 \cdot 5^n - n - 3$.

15) אם $a_1 = \frac{1}{6}$, $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{25n^2 + 35n + 6}$ אז $a_n = \frac{n}{5n + 1}$.

16) אם $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_{n+1} = a_n - \frac{2}{n^3 + 3n^2 + 2n}$ אז $a_n = \frac{1}{n^2 + n}$.

*17) אם $a_1 = 0$, $a_{n+1} = a_n + \frac{n}{(n + 1)!}$ אז $a_n = 1 - \frac{1}{n!}$.

*18) אם $a_1 = 1$, $\log\frac{a_{n+1}}{a_n} = n$ אז $\log a_n = \frac{n}{2}(n - 1)$.

אקסיומת האינדוקציה המורחבת

הוכח באמצעות האינדוקציה המורחבת שלכל n טבעי:

1) אם $a_1 = 4$, $a_2 = 5$, $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n$ אז $a_n = n + 3$.

2) אם $a_1 = 2$, $a_2 = 5$, $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n + 2$ אז $a_n = n^2 + 1$.

3) אם $a_1 = 2$, $a_2 = 8$, $a_{n+2} = 2a_{n+1} + 3a_n + 4$ אז $a_n = 3^n - 1$.

*4) אם $a_1 = 3$, $a_2 = 3$, $a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n$ אז $a_n = 2^n + (-1)^{n-1}$.

*5) אם $a_1 = 3$, $a_2 = 27$, $a_{n+2} = 4a_{n+1} + 5a_n$ אז $a_n = 5^n + (-1)^n \cdot 2$.

*6) אם $a_1 = 3$, $a_2 = 7$, $a_3 = 13$, $a_{n+3} = 4a_{n+2} - 5a_{n+1} + 2a_n$ אז $a_n = 2^n + 2n - 1$.

תרגיל 7

1. מצא את העוצמה של כל קבוצה, נמק את תשובתך.

1. $Q\times Z$
2. $P(Q-Z)$
3. $P(P(Q-\Re))$
4. $P((1,3))$
5. $\{x\in\Re \mid \quad x\geq 0\}$
6. $\{n\in N \mid \quad n\geq 5\}$
7. קבוצת המספרים הטבעיים המתחלקים ב-7 ללא שארית.

2. מצא את העוצמה של כל קבוצה, נמק את תשובתך.

1. $N\times N\times N\times N$
2. $R-Q$
3. $P((Q-N)\times Q)$
4. $Q\times Z\times N$
5. $P(R)$
6. $Z-R$
7. $P(P((0,1))$

3. נתון $|A|=\aleph_0$ וגם $|B|=\aleph_0$.

חשב את העוצמה של הקבוצות הבאות:

א. $\lvert A\cup B\rvert$	ח. $\lvert A\cup P(B)\rvert$
ב. $\lvert P(A\cup B)\rvert$	ט. $\lvert A\times P(A)\rvert$
ג. $\lvert P(A)\rvert+\lvert P(B)\rvert$	י. $\lvert A\rvert+\lvert P(B)\rvert$
ד. $\lvert A\times B\rvert$	יא. $\lvert P(P(B))\rvert$
ה. $\lvert P(A\times B)\rvert$	יב. $\lvert A\rvert\cdot\lvert P(B)\rvert$
ו. $\lvert P(A)\rvert\cdot\lvert P(B)\rvert$	יג. $\lvert P(B)^{A}\rvert$
ז. $\lvert A^{B}\rvert$	יד. $\lvert A^{P(B)}\rvert$

4. תהיינה A ו- B קבוצות זרות כך ש- $|A|=\aleph$ ו- $|B|=\aleph_0$.
מהי העוצמה של כל אחת מהקבוצות הבאות. **נמקו.**

א. $A^B \times A$
ב. $B^A \cup A^B$
ג. $P(A\times B)$
ד. $P(A^B)\times P(A)$
ה. $P(B)\cup P(A)$
ו. $P(A)^{P(B)}$

5. תהיינה A ו- B קבוצות זרות כך ש- $|A|=\aleph$ ו- $|B|=\aleph_0$.
מהי העוצמה של כל אחת מהקבוצות הבאות. נמקו.

א. A^B
ב. B^A
ג. $P(A\times B)$
ד. $P(A^B)$
ה. $P(B)\cup P(A)$
ו. $P(A)\times P(B)$

6. תהיינה A ו- B קבוצות זרות כך ש- $|A|=\aleph$ ו- $|B|=\aleph_0$.
מהי העוצמה של כל אחת מהקבוצות הבאות. נמקו.

א. $A\times P(B)$
ב. $P(A)\times P(P(B))$
ג. $A^{P(B)}$
ד. $P(A)^B$
ה. $P(B)\cup A$
ו. $P(A)\cup P(B)$

7. הוכח או סתור ע"י דוגמא נגדית:

א. אם $|A|=|B|$ וגם $|C|=|D|$ אז $|A\times C|=|B\times D|$
ב. אם $|A\times C|=|B\times D|$ אז $|A|=|B|$ וגם $|C|=|D|$

8. הוכח או סתור ע"י דוגמא נגדית :

א. אם $|A-B|=|B-A|$ אז $|A|=|B|$

ב. אם $|A|=|B|$ אז $|A-B|=|B-A|$

9. הוכח או סתור ע"י דוגמא נגדית :

א. אם $|A|=|B|$ וגם $|C|=|D|$ אז $|A^C|=|B^D|$

ב. אם $|A^C|=|B^D|$ אז $|A|=|B|$ וגם $|C|=|D|$

10. מצא 3 קבוצות A,B,C המקימות $|P(A)|=|B^C|\geq\aleph_0$

11. תנו דוגמא ל- 3 קבוצות A,B,C כך $A\neq B^C$ גם $|C|\geq\aleph_0$
המקימות $|A|=|B^C|\geq\aleph_0$

12. תן דוגמא של 4 קבוצות A,B,C,D
כך ש $|A^B|=|C^D|=\aleph_0$ אבל $A\neq C$ וגם $|B|\neq|C|$

13. מצאו דוגמא של 4 קבוצות A,B,C,D
כך ש- $|A^B|=|C^D|=\aleph$ אבל $|A|\neq|C|$ וגם $|B|\neq|D|$

14. תנו דוגמא של ארבע קבוצות $A,\ B,\ C,\ D$ כך ש- $A\neq B$ וגם $C\neq D$
כך ש - $|A^C|=|B^D|\geq\aleph_0$.

15. תנו דוגמא לשתי קבוצות A ו- B כך ש- $|P(A)|=|B|\geq\aleph_0$

16. תנו דוגמא לשתי קבוצות A ו- B כך ש- $A\subseteq B$, $A\neq B$
ומתקיים $|P(A)|=|P(B)|$

17. I. תהיינה A ו- B קבוצות זרות כך ש- $|A| = \aleph$ ו- $|B| = \aleph_0$.
חשבו את העוצמה של כל אחת מהקבוצות הבאות.

א. $A \times P(A)$
ב. $B \cup P(A)$
ג. A^B
ד. $(A \times P(B))^A$
ה. $(A \cup P(A))^{P(B)}$

II. מצאו דוגמא של 4 קבוצות A, B, C, D
כך ש- $|A^B| = |C^D| = \aleph$ אבל $|A| \neq |C|$ וגם $|B| \neq |D|$

18. I. נתון: $|A| \geq \aleph_0$ וגם $|B| \geq \aleph_0$
הוכח או סתור ע"י דוגמא נגדית:

א. אם $|A - B| = |B - A|$ אז $|A| = |B|$
ב. אם $|A| = |B|$ אז $|A - B| = |B - A|$

II. תהיינה A ו- B קבוצות זרות כך ש- $|A| = \aleph$ ו- $|B| = \aleph$.
חשבו את העוצמה של כל אחת מהקבוצות הבאות.

א. $(A \cup B)^A$
ב. $(P(A) \cup P(B))^B$
ג. $(A \times B)^A$
ד. $(P(A \cup B))^A$

19. א. הוכח ש $|\mathbf{R}|=|\mathbf{R}-\mathbf{Z}|$.

ב. מצא את עוצמתה של $|\mathbf{N}\times\mathbf{N}|$ והוכח.

20. א. הוכח שלכל k טבעי $|(0,1]\times\{1,2,\dots,k\}|=\aleph$.

ב. הוכח ש- $|\mathbf{Z}|=|\mathbf{N}\times\mathbf{N}|$.

21. א. הוכח ש $|\mathbf{R}|=|\mathbf{R}-\mathbf{N}|$.

ב. מצא את עוצמתה של $|\mathbf{N}\times\mathbf{Z}|$ והוכח.

בדיסקרטית - תרגול 8:

עוצמות:

תזכורת:

יהיו A ו-B קבוצות. העוצמה של A שווה לעוצמה של B.
אם קיימת $f:A\to B$ פונקציה חח"ע ועל.
בס "תרגיל ה".

נתון: $|A|=|B|$ וגם $|C|=|D|$

צ"ל: $|A\times C|=|B\times D|$

פתרון:

$|A|=|B|$ ← קיימת $f:A\to B$ פונקציה חח"ע ועל

$|C|=|D|$ ← קיימת $g:C\to D$ פונקציה חח"ע ועל

צ"ל:

קיימת $h:A\times C\to B\times D$ פונקציה חח"ע ועל.

נגדיר $h((a,c))=(f(a),g(c))$

צ"ל: h חח"ע ועל.

h חח"ע:

נניח: $h((a_1,c_1))=h((a_2,c_2))$

צ"ל: $(a_1,c_1)=(a_2,c_2)$

צ"ל $a_1=a_2$ וגם $c_1=c_2$

$h(a_1,c_1)=h(a_2,c_2)$ ← $(f(a_1),g(c_1))=(f(a_2),g(c_2))$ ←

← $f(a_1)=f(a_2)$ וגם $g(c_1)=g(c_2)$ $\xleftarrow{\text{כי f,g חח"ע}}$ $a_1=a_2$ וגם $c_1=c_2$

h על:

f על ← לכל $b\in B$ קיים $a\in A$ כך ש-$f(a)=b$

g על ← לכל $d\in D$ קיים $c\in C$ כך ש-$f(c)=d$ ←

← לכל $b\in B$ ולכל $d\in D$ קיים $a\in A$ וקיים $c\in C$ כך ש-

$(f(a),g(c))=(b,d)$ ← לכל $(b,d)\in B\times D$ קיים

$(a,c)\in A\times C$ כך ש-$h((a,c))=(f(a),g(c))=(b,d)$ ←

סע' ח.

9 נתון: $|A\times C| = |B\times D|$

צ"ל: $|A|=|B|$ וגם $|C|=|D|$

הערה:

$|A\times C| = |A|\cdot|C|$

$|B\times D| = |B|\cdot|D|$

דוגמא נגדית:

$A=(0,1)$ $\quad B=\mathbb{Z}$ $\quad C=\mathbb{N}$ $\quad D=\mathbb{R}$

$|A|=\aleph$ $\quad |B|=\aleph_0$ $\quad |C|=\aleph_0$ $\quad |D|=\aleph$

$|A\times C| = |A|\cdot|C| = \aleph\cdot\aleph_0$

$|B\times D| = |B|\cdot|D| = \aleph_0\cdot\aleph$

$|A|\neq|B|$

$|C|\neq|D|$

חשבון עוצמות:

חוקים:

1. $\aleph_0+\aleph_0=\aleph_0$
2. $\aleph+\aleph=\aleph$
3. $\aleph\cdot\aleph=\aleph$
4. $\aleph_0\cdot\aleph_0=\aleph_0$
5. $2^{\aleph_0}=\aleph$
6. $\aleph_0<\aleph$
7. $|A^B|=|A|^{|B|}$
8. $|A\times B|=|A|\cdot|B|$
9. $|A\cup B|\leq|A|+|B|$
10. $|P(A)|=2^{|A|}$

11 משפט קנטור ברנשטיין:

אם $|A|=|C|$

וגם $A\subseteq B\subseteq C$

אז $|A|=|B|$

תרגיל:

הוכח $\aleph_0+\aleph=\aleph$

הוכחה:

$$\aleph \leq \aleph_0+\aleph \leq \aleph+\aleph=\aleph$$

לפי קנטור ברנשטין

$$\aleph_0+\aleph=\aleph$$

תרגיל:

הוכח: $\aleph_0\cdot\aleph=\aleph$

הוכחה:

$$\aleph\leq\aleph_0\cdot\aleph\leq\aleph\cdot\aleph=\aleph$$

$$\aleph_0\cdot\aleph=\aleph$$

המשך חוקים:

12. $|\mathbb{R}|=\aleph$

13. $|\mathbb{N}|=\aleph_0$

14. $|\mathbb{Z}|=\aleph_0$

15. $|\mathbb{Q}|=\aleph_0$

16. $|(a,b]|=|[a,b)|=|(a,b)|=\aleph$

א. נתון $|A|=\aleph_0$ $\quad |B|=\aleph_0$

ב. מצא $|A\cup B|$

$$|A|\leq|A\cup B|\leq|A|+|B|$$

$$\aleph_0\leq|A\cup B|\leq\aleph_0+\aleph_0=\aleph_0$$

$$|A\cup B|=\aleph_0$$

ג. $|P(A\cup B)|=2^{|A\cup B|}=$ לפי סעיף $=$

$$=2^{\aleph_0}=\aleph$$

ד. $|P(A)|+|P(B)|=2^{|A|}+2^{|B|}=$

$$=2^{\aleph_0}+2^{\aleph_0}=\aleph+\aleph=\aleph$$

$$|A\times B| = |A|\cdot|B| = \aleph_0\cdot\aleph_0 = \aleph_0$$ ב.

$$|P(A\times B)| = 2^{|A\times B|} = 2^{\aleph_0} = \aleph$$ ג.

$$|P(A)|\cdot|P(B)| = 2^{|A|}\cdot 2^{|B|} = 2^{\aleph_0}\cdot 2^{\aleph_0} = \aleph\cdot\aleph = \aleph$$ ו.

$$|A^B| = |A|^{|B|} = \aleph_0^{\aleph_0} = \aleph$$ ל.

$$\aleph = 2^{\aleph_0} \le \aleph_0^{\aleph_0} \le \aleph^{\aleph_0} = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0\cdot\aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \aleph$$

$$\aleph = 2^{\aleph_0} = |P(B)| \le |A\cup P(B)| \le |A| + |P(B)| = |A| + 2^{|B|} =$$ ח.

$$= \aleph_0 + 2^{\aleph_0} = \aleph_0 + \aleph = \aleph$$

$$\aleph \le \aleph_0 + \aleph \le \aleph + \aleph$$

$$|A\cup P(B)| = \aleph$$

$$\aleph = 2^{\aleph_0} = |P(A)| \le |A\times P(A)| = |A|\cdot|P(A)| = \aleph_0\cdot 2^{\aleph_0} =$$ כ.

$$= \aleph_0\cdot\aleph = \aleph$$

$$\aleph \le \aleph_0\cdot\aleph \le \aleph\cdot\aleph = \aleph$$

$$|A\times P(A)| = \aleph$$

$$\aleph = 2^{\aleph_0} = |P(B)| \le |A| + |P(B)| \le \aleph_0 + 2^{\aleph_0} = \aleph_0 + \aleph = \aleph$$ ד.

$$\aleph \le \aleph_0 + \aleph \le \aleph + \aleph = \aleph$$

$$|A| + |P(B)| = \aleph$$

$$|P(P(B))| = 2^{|P(B)|} = 2^{(2^{\aleph_0})} = 2^{\aleph}$$

$$|A|\cdot|P(B)| = \aleph_0\cdot 2^{|B|} = \aleph_0\cdot 2^{\aleph_0} = \aleph_0\cdot\aleph = \aleph$$

$$\aleph \le \aleph_0\cdot\aleph \le \aleph\cdot\aleph = \aleph$$

$$|P(B)^A| = |P(B)|^{|A|} =$$

$$= (2^{|B|})^{|A|} = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0\cdot\aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \aleph$$

ב. $|A^{P(B)}| = |A|^{|P(B)|} = \aleph_0^{(2^{\aleph_0})} = \aleph_0^{\aleph} = 2^{\aleph}$

$2^{\aleph} \le \aleph_0^{\aleph} \le \aleph^{\aleph} = (2^{\aleph_0})^{\aleph} = 2^{\aleph_0 \cdot \aleph} = 2^{\aleph}$

$\aleph \le \aleph_0 \cdot \aleph \le \aleph \cdot \aleph = \aleph$

דף "תרגיל 4":

1. $A = \{ f: \mathbb{N} \to \mathbb{N} \mid$ פונקציה שלמה $f \}$

$R = \{ (f,g) \in A \times A \mid R(f) = R(g),\ im(f) = im(g) \}$

צ"ל R יחס שקילות.

א. $[I_{\mathbb{N}}] = \{ g \in A \mid (I_{\mathbb{N}}, g) \in R \} = \{ g \in A \mid im(I_{\mathbb{N}}) = im(g) \}$
$= \{ g \in A \mid im(g) = \mathbb{N} \} = \{ g \in A \mid$ על $g \}$

ב. $f(x) = 1$ וגם $g(x) = 2$ וגם $h(x) = 3$

$\leftarrow (f,g) \notin R$

$im(f) = \{1\}$

$im(g) = \{2\}$

$[f(x)] = \{f\}$

$\{$כל הפונקציות הקבועות$\} = \{$כל המחלקות של פונקציות קבועות$\}$

יש $\aleph_0$ פונקציות קבועות.

ג. $A/R = \{$כל מחלקות השקילות$\} =$

כל התמונות האפשריות הוא $P(\mathbb{N})$ $\leftarrow |P(\mathbb{N})| = \aleph$

לכן כל מחלקות השקילות האפשריות הם $P(\mathbb{N})$

(יש $\aleph$ כאלה).

דוגמא:

$\{1,2\}$

$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{זוגי } x \\ 2 & \text{אי זוגי } x \end{cases}$

$g(x) = \begin{cases} 2 & \text{זוגי } x \\ 1 & \text{אי זוגי } x \end{cases}$

ד. $T = \{ (f,g) \in A \times A \mid R(f) \subseteq R(g) \}$

T לא אנטי סימטרי כי

אם $(f,g) \in T$ וגם $(g,f) \in T$ $\leftarrow$

$\leftarrow R(f) \subseteq R(g)$ וגם $R(g) \subseteq R(f)$

$\leftarrow R(f) = R(g) \not\Rightarrow f = g$

5.

דוגמא נגדית:

$f(x)=x$ על

$g(x)=\begin{cases} 1 & x=1 \\ x-1 & x>1 \end{cases}$ על

$f \neq g$

דיסקרטית - תרגול 9:

אינדוקציה:

שיטה להוכיח תכונה על מספרים הטבעיים.

השיטה:

שלב 1:

צריך להוכיח את נכונות התכונה לערך התחלתי בדרך כלל $n=1$.

שלב 2:

נניח שהתכונה נכונה עבור $n=k$

שלב 3:

צ"ל נכונות התכונה עבור $n=k+1$ ואז התכונה נכונה לכל מספר טבעי.

דוג' "תרגילים":

3. צ"ל $1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2$

פתרון:

הוכחה באינדוקציה על n

שלב 1:

$n=1$

$2\cdot1-1=1$

$1=1^2$

שלב 2:

נניח נכונות עבור $n=k$

(תון) $1+3+5+\ldots+(2k-1)=k^2$

שלב 3:

צ"ל נכונות עבור $n=k+1$

צ"ל:

$$1+3+5+\ldots+[2(k+1)-1]=(k+1)^2$$

$$1+3+5+\ldots+[2(k+1)-1]=$$

הקפיצה ב-2 $=\underbrace{1+3+5+\ldots+(2k-1)}_{\text{לפי (תון)} = k^2}+(2k+1)=$

1. לכן איבר הקודם הוא $2k-1$.

$k^2+2k+1=(k+1)^2$

6 צ"ל $5+9+13+\ldots+(4n+1)=n(2n+3)$

פתרון:

הוכחה באינדוקציה על n:

שלב 1: $n=1$

$4\cdot 1+1=5$

$5=1\cdot(2\cdot 1+3)$

$5=5$

שלב 2:

נניח נכונות עבור $n=k$

נתון: $5+9+13+\ldots+(4k+1)=k(2k+3)$

שלב 3:

צ"ל נכונות עבור $n=k+1$

צ"ל:

$5+9+13+\ldots+[4(k+1)+1]=(k+1)\cdot[2(k+1)+3]$

צ"ל:

$5+9+13+\ldots+(4k+5)=(k+1)(2k+5)$

צ"ל:

$5+9+13+\ldots+(4k+5)=2k^2+7k+5$

$=\underbrace{5+9+13+\ldots+(4k+1)}_{k(2k+3)=\text{נתון}}+(4k+5)=$

$=k(2k+3)+4k+5=2k^2+3k+4k+5=$

$=2k^2+7k+5$

רקורסיה (נוסחאות נסיגה):

2. אם $a_1=4$, $a_{n+1}=a_n+18n+3$ אז $a_n=(3n-1)^2$

הוכחה באינדוקציה על n:

נתון: ① $a_1=4$

② $a_{n+1}=a_n+18n+3$

צ"ל: $a_n=(3n-1)^2$

שלב 1: $n=1$

$a_1=(3\cdot 1-1)^2=2^2=4$

שלב 2: נניח נכונות עבור $n=k$

③ נתון: $a_k=(3k-1)^2$

שלב 3:

צ"ל נכונות עבור $n=k+1$

צ"ל $a_{k+1}=[3(k+1)-1]^2$

$a_{k+1}=(3k+2)^2=9k^2+12k+4$

$a_{k+1}\overset{\text{נתון ②}}{=}a_k+18k+3\overset{\text{נתון ③}}{=}(3k-1)^2+18k+3=9k^2-6k+1+18k+3=$

$=9k^2+12k+4.$

$\boxed{*\,(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3}$

5. אם $a_1=2$, $a_{n+1}=a_n+3n^2+3n$ אז $a_n=n^3-n+2$

נתון: ① $a_1=2$

② $a_{n+1}=a_n+3n^2+3n$

צ"ל: $a_n=n^3-n+2$

הוכחה באינדוקציה

שלב 1: $n=1$

$a_1=1^3-1+2=2$

שלב 2: נניח נכונות עבור $n=k$

נתון: ③ $a_k=k^3-k+2$

שלב 3:

צ"ל נכונות עבור $n=k+1$

צ"ל:

$$a_{k+1}=(k+1)^3-(k+1)+2=$$
$$=k^3+3k^2+3k+1-k-1+2=$$
$$=k^3+3k^2+2k+2$$
$$a_{k+1}\overset{\text{(הנ"ח)}\,2}{=}a_k+3k^2+3k\overset{\text{(הנ"ח)}\,3}{=}k^3-k+2+3k^2+3k=$$
$$=k^3+3k^2+2k+2$$

תרגיל:

נניח יש שק עם אינסוף מטבעות של 2 ו- 5 שקלים.
הוכח שאפשר לשלם כל סכום שלם של שקלים שגדול שווה מ-4.

פתרון: סכום

צ"ל לכל $n\geq4$ טבעי קיימים $a\geq0$ ו- $b\geq0$ טבעיים
כך ש- $n=2a+5b$

הוכחה באינדוקציה על n:

שלב 1:

$n=4$ $\quad 4=2\cdot2+5\cdot0$

$b=0,\ a=2$

שלב 2:

נניח נכונות עבור $n=k$

נניח קיימים $a\geq0$ ו- $b\geq0$ טבעיים כך ש- $k=2a+5b$

שלב 3:

צ"ל נכונות עבור $n=k+1$

צ"ל קיים $x\geq0$ ו- $y\geq0$ טבעיים כך ש-:

$$n+1=2x+5y$$

$8=2\cdot4+5\cdot0,\ a=4,\ b=0$

$9=2\cdot2+5\cdot1,\ a=2,\ b=1$

$10=2\cdot5+5\cdot0,\ a=5,\ b=0$

או:

$10=2\cdot0+5\cdot2,\ a=0,\ b=2$

$k+1 \overset{(א)}{=} 2a+5b+1 = 2a+5b+5-4 =$

$k+1 = 2(a-2)+5(b+1)$

אם $(a \geq 2)$ $a-2 \geq 0$

נקח $x = a-2$

$y = b+1$

נקבל $k+1 = 2x+5y$

אם $(a \geq 0$ וגם$)$ $a-2 < 0$

$\Leftarrow$ $a \geq 0$ וגם $a < 2$

$\Leftarrow$ $a = 1$ או $a = 0$

$a = 0 \Rightarrow$ $k = 2 \cdot 0 + 5b = 5b$

$\Leftarrow$ $k+1 = 5b+1$

$\Leftarrow$ $k+1 = 5b-5+6$

$k+1 = 2 \cdot 3 + 5(b-1)$

(א) $k \geq 4$ וגם $k = 5b$

$\Leftarrow$ $5b \geq 4$ לכל b

$\Leftarrow$ $b \geq 1$ $\Rightarrow$ $b-1 \geq 0$

נקח $y = b-1 \geq 0$ $x = 3$

נקבל $k+1 = 2x+5y$

$a = 1 \Rightarrow$ $k = 2 \cdot 1 + 5b$

$\Leftarrow$ $k = 2+5b$

$\Leftarrow$ $k+1 = 2+5b+1$

$k+1 = 2+5b-5+6$

$k+1 = 8+5b-5$

$k+1 = 8+5(b-1)$

$k \geq 4$ וגם $k = 2+5b$

$\Leftarrow$ $b \geq 1$ $\Rightarrow$ $b-1 \geq 0$

נקח $y = b-1 \geq 0$, $x = 4$

נקבל

$k+1 = 2x+5b$

דף "תרגיל 1 באינדוקציה"

11. סדרה חשבונית $a_n = a_1 + (n-1)d$

צ"ל:

$$S_n = \frac{n}{2}\cdot[2a_1 + (n-1)d]$$

כאשר

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

הוכחה באינדוקציה על n:

שלב 1: $n=1$

$$S_1 = \frac{1}{2}\cdot[2a_1 + (1-1)d] = a_1$$

שלב 2: נניח נכונות עבור $n=k$

כלומר:

$$S_k = \frac{k}{2}\cdot[2a_1 + (k-1)d]$$

שלב 3:

צ"ל נכונות עבור $n=k+1$

צ"ל:

$$S_{n+1} = \frac{k+1}{2}\cdot[2a_1 + kd]$$

$$S_{k+1} = a_1 + a_2 + \ldots + a_k + a_{k+1} = S_k + a_{k+1} =$$

$$= \frac{k}{2}\cdot[2a_1 + (k-1)d] + a_1 + kd =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot(2a_1k + k^2d - kd + 2a_1 + 2kd) =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot[2a_1(k+1) + d\cdot(k^2+k)] =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot[2a_1(k+1) + dk(k+1)] =$$

$$= \frac{k+1}{2}\cdot[2a_1 + d\cdot k]$$